Αναγνώριση Προτύπων

Ασκήσεις 1

Bayesian Θεωρία αποφάσεων

Πρόβλημα 1.1

Ο ακόλουθος πίνακας του Σχήματος (1) μας δίνει τις υπό συνθήκη πιθανότητες μιας τυχαίας μεταβλητής X για τρεις κατηγορίες ω_1, ω_2, και ω_3· Έστω ότι γνωρίζουμε τις *a priori* πιθανότητες $p(\omega_1)$ = 0,3 και $p(\omega_2)$ = 0, 3.
Υπολογίστε *το* ολικό σφάλμα της ταξινόμησης χρησιμοποιώντας τον κανόνα απόφασης Bayes.

p(X=x/ω)						
	X=1	X=2	X=3	X=4	X=5	X=6
ω_1	*0,3*	*0,2*	*0,1*	*0,1*	*0,2*	*0,1*
ω_2	*0,2*	*0,2*	*0,4*	*0,05*	*0,1*	*0,05*
ω_3	*0,1*	*0,3*	*0,15*	*0,05*	*0,3*	*0,1*

Σχήμα 1: Παρατηρείστε ότι $\Sigma_X P(x/\omega_i) = 1{,}0$ και η τυχαία μεταβλητή X παίρνει τιμές στο διάστημα [1,6].

Πρόβλημα 1.2

Υπολογίστε το ολικό σφάλμα της κατηγοριοποίησης κατά Bayes για δυο κατηγορίες ω_1 και ω_2, με $p(\omega_1)=0{,}25$, όπου θεωρούμε δείγματα σε 2-διαστάσεις από γκαουσιανές κατανομές που περιγράφονται από τις ακόλουθες πυκνότητες πιθανότητας:

$$p(\bar{x}/\omega_1) = N(\bar{\mu}_1, \bar{\Sigma}_1) \text{ και } p(\bar{x}/\omega_2) = N(\bar{\mu}_2, \bar{\Sigma}_2)$$

με

$$\bar{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \text{ και } \bar{\mu}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Πρόβλημα 1.3

Θεωρείστε μια. μέτρηση σε τρεις διαστάσεις $\overline{x}=(x_1\ \ x_2\ \ x_3)^t$· Έστω ότι έχουμε 4 δείγματα από την κατηγορία *ω_1* και 4 δείγματα από την κατηγορία *ω_2*:

ω_1 : $\{(1\ 0\ 1)^t, (0\ 0\ 0)^t, (1\ 0\ 0)^t, (1\ 1\ 0)^t\}$

ω_2: $\{(0\ 0\ 1)^t, (0\ 1\ 1)^t, (1\ 1\ 1)^t, (0\ 1\ 0)^t\}$

Να υποθέσετε ότι η μεταβλητή x είναι γκαουσιανή, όπου μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τις ακόλουθες σχέσεις για τον προσδιορισμό της μέσης τιμής και της διασποράς:

$$\overline{\mu}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{x}_k \quad \text{και} \quad \overline{\Sigma}=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{x}_k\overline{x}_k^t-\overline{\mu}\overline{\mu}^t$$

όπου *N* είναι το πλήθος των δειγμάτων.

Να χρησιμοποιήσετε τον κανόνα απόφασης *Bayes* για τον προσδιορισμό της επιφάνειας απόφασης. Προσδιορίστε την ολική πιθανότητα για την σωστή κατηγοριοποίηση του κανόνα απόφασης Bayes.

Πρόβλημα 1.4

Έστω τα δείγματα:

$$(1\ \ 2)^t,\ (2\ \ 2)^t,\ (3\ \ 1)^t,\ (3\ \ 2)^t,\ (2\ \ 3)^t$$

ανήκουν σε μια. κατηγορία *ω_1.* Επιπλέον, έστω τα δείγματα:

$$(7\ \ 9)^t,\ (8\ \ 9)^t,\ (9\ \ 8)^t,\ (9\ \ 9)^t,\ (8\ \ 10)^t$$

ανήκουν σε μια κατηγορία *ω_2*· Έστω *ότι* τα δείγματα των δυο κατηγοριών προέρχονται από γκαουσιανές πυκνότητες πιθανότητας.

Να βρείτε την επιφάνεια απόφασης εφαρμόζοντας τον κανόνα Bayes.

Πρόβλημα 1.5

Η επιφάνεια απόφασης για δυο κατηγορίες *ω_1* και ω_2 που είναι κατανεμημένες κατά γκάους με πίνακες διασποράς:

$$\overline{\Sigma}_1=\overline{\Sigma}_2\neq\sigma^2 I$$

μέσες τιμές $\boldsymbol{\mu_1}$ και $\boldsymbol{\mu_2}$ *και*

$$p(\omega_1) \neq p(\omega_2)$$

είναι μια υπερεπιφάνεια που περιγράφεται από την ακόλουθη γραμμική εξίσωση:

$$\overline{\mathbf{w}}^{\mathbf{t}}(\overline{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}_{\mathbf{0}}) = 0$$

Να εκφράσετε *τις* παραμέτρους $\boldsymbol{w}$ και $\boldsymbol{x_0}$ ως συνάρτηση των $\boldsymbol{\mu_1}$, $\boldsymbol{\mu_2}$, $\boldsymbol{\Sigma}$, $p(\omega_1)$, και $p(\omega_2)$.

Ο ίδιος κανόνας απόφασης Bayes για δυο κατηγορίες με πίνακες διασποράς:

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{1}} \neq \overline{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{2}} \text{ και } p(\omega_1) \neq p(\omega_2)$$

που περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\overline{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}}\mathbf{B}\overline{\mathbf{x}} + \mathbf{A}^{t}\overline{\mathbf{x}} + w_0 = 0$$

Να καθορήσετε τις παραμέτρους $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$, και w_0.

Πρόβλημα 1.6

Θεωρείστε ένα πρόβλημα αναγνώρισης προτύπων με Μ-κατηγορίες μιας διάστασης όπου κάθε κατηγορία χαρακτηρίζεται από μια κατανομή πυκνότητας πιθανότητας Rayleigh:

$$p(x/\omega_i) = \left(x/\sigma_i^2\right)e^{-x^2/2\sigma^2}u(x)$$

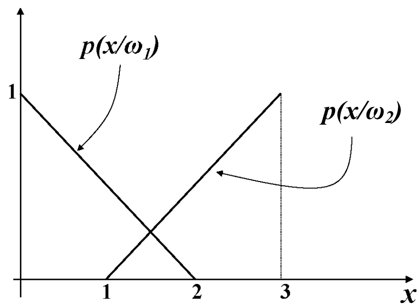
Βρείτε τη συνάρτηση απόφασης Bayes του προβλήματος, υποθέτοντας *ότι οι a priori* πιθανότητες είναι $p(\omega_1) = 1/M$.

Επαναλάβατε το ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση για την κατανομή πυκνότητας πιθανότητας:

$$p(x/\omega_i) = \left(x/T_i\right)e^{-x/T_i}u(x)$$

Πρόβλημα 1.7

Έστω *ότι* δυο κατηγορίες περιγράφονται από τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας *του* Σχήματος (2). Βρείτε την ευθεία (σύνορο) απόφασης Bayes.



Πρόβλημα 1.8

Υποθέτουμε ότι οι ακόλουθες δυο κατηγορίες (ω_1,ω_2) περιγράφονται από γκαουσιανές συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

ω_1:{$(0\ \ 0)^t$, $(2\ \ 0)^t$, $(2\ \ 2)^t$, $(0\ \ 2)^t$} και ω_2: {$(4\ \ 4)^t$, $(6\ \ 4)^t$, $(6\ \ 6)^t$, $(4\ \ 6)^t$}.

Έστω *ότι οι* a priori πιθανότητες είναι ίσες, $p(\omega_1) = p(\omega_2)$. Να βρείτε την εξίσωση που περιγράφει το σύνορο απόφασης Bayes μεταξύ των δυο αυτών κατηγοριών.

Πρόβλημα 1.9

Επαναλάβατε το πρόβλημα (1.8) για *τις* ακόλουθες κατηγορίες:

ω_1 : {$(-1\ 0)^t$, $(0\ \ -1)^t$, $(1\ \ 0)^t$, $(0\ \ 1)^t$} και ω_2 : {$(-2\ \ 0)^t$, $(0\ \ -2)^t$, $(2\ \ 0)^t$, $(0\ \ 2)^t$} .

Παρατηρείστε ότι οι δυο αυτές κατηγορίες δεν είναι γραμμικά διαχωρισμένες.