ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Αναγνώριση Προτύπων

Βασικά θεωρίας πιθανοτήτων
Τυχαίες Μεταβλητές
Στοχαστικές Διεργασίες
Διανύσματα

ΚαθηγητήςΧριστόδουλος Χαμζάς

2010

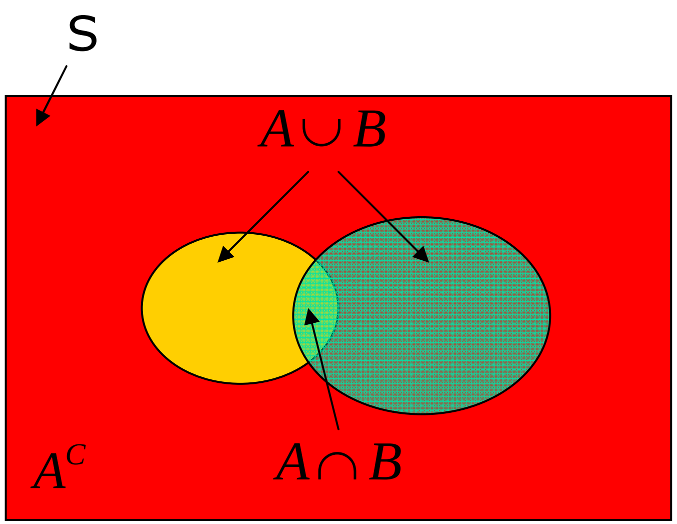
Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

Χώρος Δειγμάτων - Γεγονότα

- Δείγμα
  - Το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος
- Χώρος δειγμάτων S
  - Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων
  - Διακριτός και συνεχής
- Γεγονότα
  - Ένα σύνολο αποτελεσμάτων, άρα ένα υποσύνολο του S

Λειτουργίες συνόλων

- Ένωση $A \cup B$
- Τομή $A \cap B$
- Συμπλήρωμα A^C



- Ιδιότητες

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Κανόνας De Morgan

$$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$$

Αξιώματα και ιδιότητες

- **Αξιώματα**
- $0 \leq P[A]$
- $P[S] = 1$
- Αν $A \cap B = \varnothing$

  $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$
- Αν A_1, A_2, … αμοιβαία αποκλειόμενα

  $$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$$

- **Ιδιότητες**
- $P\left[A^C\right] = 1 - P[A]$
- $P[A] \leq 1$
- $P[\varnothing] = 0$
- $P[A \cup B] =$

  $P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

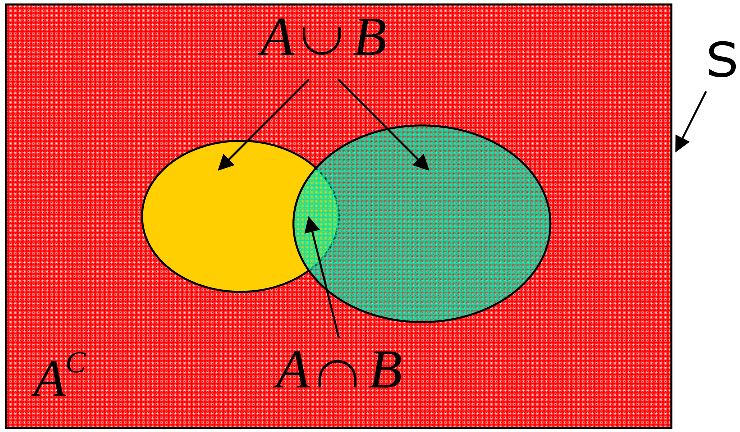
Υπό συνθήκη πιθανότητα

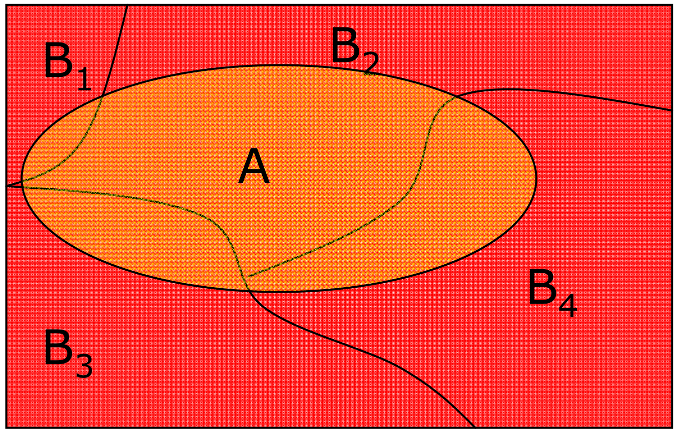
- Υπό συνθήκη πιθανότητα γεγονότος A υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί το γεγονός B

$$P[A \mid B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- Αν $B_1, B_2, \ldots, B_n$ είναι ένας ***διαχωρισμός*** του S, τότε

$$P[A] = P[A \mid B_1]P[B_1] + \ldots + P[A \mid B_j]P[B_j]$$





Κανόνας Bayes - Ανεξαρτησία

- Αν $B_1, \ldots, B_n$ είναι ένας ***διαχωρισμός*** του S τότε

$$P\left[B_j \mid A\right] = \frac{P\left[A \cap B_j\right]}{P[A]} = \frac{P\left[A \mid B_j\right] P\left[B_j\right]}{\sum_{k=1}^{n} P\left[A \mid B_k\right] P\left[B_k\right]}$$

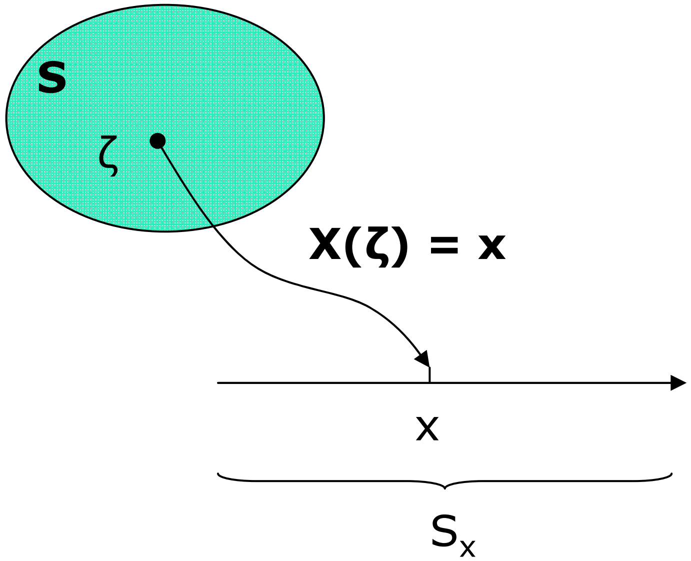
$$posterior = \frac{likelihood \times prior}{evidence}$$

- Τα γεγονότα A και B είναι ***ανεξάρτητα*** αν

$$P[A \cap B] = P[A] P[B]$$

Τυχαίες Μεταβλητές

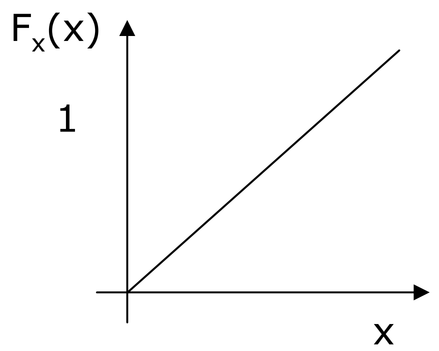
- Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής
  - Το αποτέλεσμα δεν είναι πάντα ένας αριθμός
  - Αποδίδει μια αριθμητική τιμή στο αποτέλεσμα ενός πειράματος
- Ορισμός
  - Μία συνάρτηση X που αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό X(ζ) σε κάθε αποτέλεσμα ζ στον χώρο των δειγμάτων ενός τυχαίου πειράματος



Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

- Ορίζεται ως η πιθανότητα του γεγονότος {X≤x}

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$



- Ιδιότητες

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

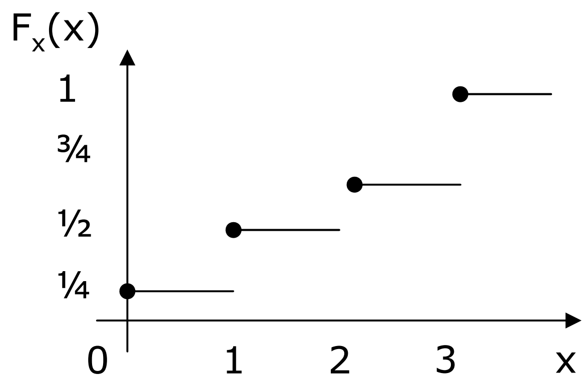
$$\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\text{if } a < b \text{ then } F_X(a) \leq F_X(a)$$

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P[X > x] = 1 - F_X(x)$$



Τύποι τυχαίων μεταβλητών

- Συνεχείς

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

- Διακριτές

$$P_X(x_k) = P[X = x_k]$$

$$F_X(x) = \sum_k P_X[x_k]\,u(x - x_k)$$

Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

- Η pdf υπολογίζεται από την

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- Ιδιότητες

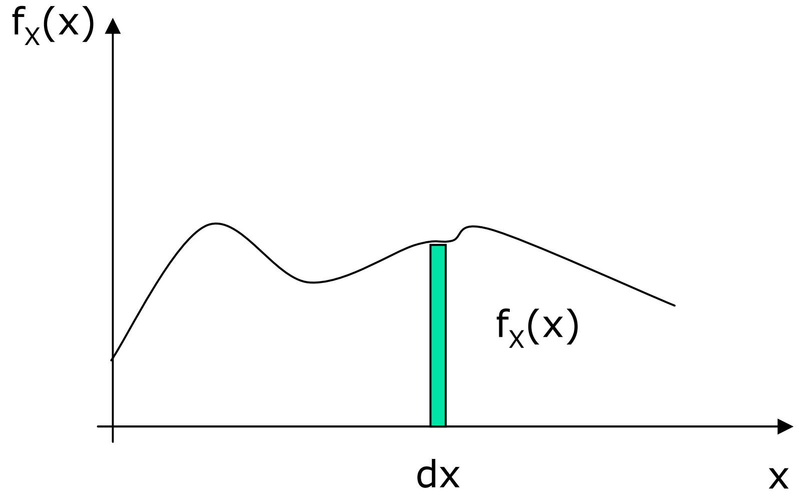
$$P[a \le X \le b] = \int_a^b f_X(x)\,dx$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt$$

- Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$$f_X(x) = \sum_k P_X[x_k]\,\delta(x - x_k)$$



$$P[x \le X \le x + dx] = f_X(x)\,dx$$

Υπό συνθήκη κατανομή

- Υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής της Χ δοσμένου του γεγονότος Β

$$F_X\left(x \mid B\right) = \frac{P\left[X \le x \cap B\right]}{P\left[B\right]}$$

- Η υπό συνθήκη pdf είναι

$$f_X\left(x \mid B\right) = \frac{dF_X\left(x \mid B\right)}{dx}$$

Μέση τιμή και μεταβλητότητα

- Η αναμενόμενη ή μέση τιμή της X είναι

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\,dt$$

$$E[X] = \sum_k x_k P_X(x_k)$$

- Ιδιότητες

$$E[c] = c$$

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E[X + c] = E[X] + c$$

- Η μεταβλητότητα της X είναι

$$Var[X] = \sigma^2 = E\left[\left(X - E[X]\right)^2\right]$$

- Η τυπική απόκλιση της X είναι

$$Std[X] = \sigma = \sqrt{Var[X]}$$

- Ιδιότητες

$$Var[c] = 0$$

$$Var[cX] = c^2 Var[X]$$

$$Var[X + c] = Var[X]$$

Κοινές κατανομές

- Κοινή συνάρτηση κατανομής των X, Y

$$p_{XY}\left[x_j, y_k\right] = P\left[\left\{X = x_j\right\} \cap \left\{Y = y_j\right\}\right]$$
$$= P\left[X = x_j, Y = y_k\right]$$

$$F_{XY}\left(x_1, y_1\right) = P\left[X \le x_1, Y \le y_1\right]$$

- Κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$$

Ανεξαρτησία δύο Τυχαίων Μεταβλητών

- Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν τα {X ≤ x} και {Y ≤ y} είναι ανεξάρτητα για οποιονδήποτε συνδυασμό των x, y

$$F_{XY}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\,f_Y(y)$$

- Συμμεταβλητότητα των X και Y

$$E\{(X-m_x),(Y-m_y)\} = \int\int (x-m_x)(y-m_y)\,f_{XY}(x,y)dxdy$$

- Συσχέτιση των X και Y

$$E\{X,Y\} = \int\int xyf(x,y)dxdy$$

Οριακή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{\mathbf{x}}(x) = \int f_{\mathbf{xy}}(x, y)dy$$

$$p_x(x_i) = \sum_j p_{xy}(x_i, y_j)$$

Παράδειγμα: Marginal probability distributions

$$f_1(x_1) = P(X_1 = x_1) = \sum_{all\ x_2} f(x_1, x_2)$$

EX.

		x_1	
	0	1	2
x_2 0	0.1	0.4	0.1
1	0.2	0.2	0
$f_1(x_1)$	0.3	0.6	0.1

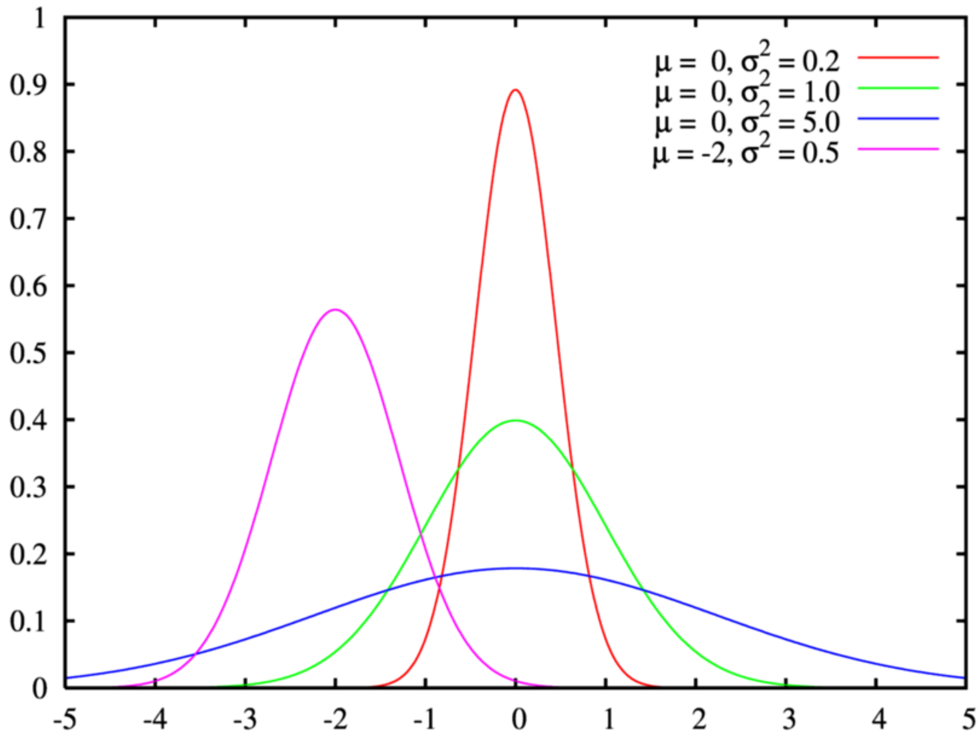
Κανονική Κατανομή (Gauss)

$$N(\mu,\sigma^2) = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$E\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \mu$$

$$E\{(x-\mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x)dx = \sigma^2$$



$$\Pr(|x-\mu| \le \sigma) \cong 0.68,\ \Pr(|x-\mu| \le 2\sigma) \cong 0.95,\ \Pr(|x-\mu| \le 3\sigma) \cong 0.997,$$

Gaussian Distribution (συν.)

Συνάρτηση Σφάλματος

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$

$$\mu\varepsilon \quad erf(0) = 0, \; erf(1) = 0.84, \; erf(\infty) = 1$$

$$\gamma\iota\alpha \quad N(\mu, \sigma^2)$$

$$P(|x-\mu| \leq \mathrm{A}) = erf\left(\frac{\mathrm{A}}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

$$P(x \leq a) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{a-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

Η συνάρτηση σφάλματος *erf(x)* δεν υπολογίζεται αναλυτικά και γιαυτό για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούμε πίνακες, προσεγγίσεις ή αριθμητική ολοκλήρωση

π.χ. στο MatLab υπάρχει η συνάρτηση *erf(x)* καθώς και η αντίστροφή της *erfinv(x).*

Στοχαστικές (ή τυχαίες) Διεργασίες

- **Stochastic process** (or random process) **:**

We are given an experiment G specified by its outcomes ζ. To every outcome ζ we now assign, according to a certain rule, a time function

$$x(t,\zeta_i)$$

We have thus created a family of functions, one for each ζ. This family $x(t,\zeta)$ is called a stochastic process.

A stochastic process can be viewed as a function of two variables *t* and *ζ*. For a specific outcome ζ_i, the expression $x(t,\zeta_i)$ is a time function. For a specific time t_i, $x(t_i,\zeta)$ is a random variable. Finally, $x(t_i,\zeta_i)$ is a number.

Παράδειγμα

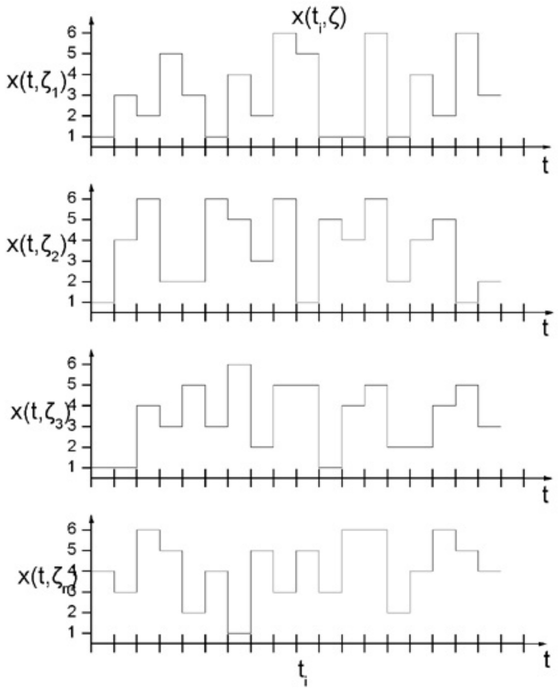
Consider a large number of dice (ζ_1, ζ_2, ... ,ζ_n) and let assume that we toss them simultaneously many times. We define

$x(t_i,\zeta_j)$=k, k = 1, 2, ... ,6

where k is the number shown in the face of the ζ_j die at the time t_i (see fig.1)

Such a collection of waveforms is called **ensemble.**

A specific waveform $x(t,\zeta_i)$ is called a **sample function.**



Ensemble average, Time averages

Ensemble average E{.} : Consider the values of the stochastic process *x(t,ζ)* at the time t_i. Then *x(t_i,ζ)* is a random variable. The statistical averages obtained from measurements made on *x(t_i,ζ)* are called *ensemble averages*.

Time averages: The statistical averages obtained by observing a sample function *x(t,$ζ_i$)* are called *time averages*.

Example: Let assume that the random variable ζ (discrete) has a probability P(ζ=ζi,t0), we have

ensemble mean = $$\sum_{i=1}^{N} \underset{\sim}{x}(\zeta_i, t_0) P_i(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x(\zeta_i, t_0)$$

time mean = $$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{1}{M} \sum_{\kappa=1}^{M} x(\zeta_i, t_\kappa)$$

Ergodic process

- A stochastic process is called ergodic iff (if and only if) its

  TIME AVERAGES = ENSEMBLE AVERAGES

Stationary process

A random process is completely described by the N-fold joint p.d.f. of its values at the arbitrary time .

p.d.f. = $f(x(\zeta,t_1),x(\zeta,t_2),\ldots, x(\zeta,t_N))$

If this p.d.f. is invariant under a shift of the time origin, the process is called *stationary in the **strict** sense.*

Ergodicity implies stationarity but the reverse is not in general true.

From now on, we shall use the notation **x**(t) to represent a stochastic process. The specific interpretation of

$\mathbf{x}(t)$ as $\{x(\zeta,t), x(\zeta,t_i), x(\zeta_j,t), x(\zeta_i,t_i)\}$

will be understood from the context.

Autocorrelation $\mathbf{R_x(t_1,t_2)}$

Η αυτοσυσχέτιση μιας στοχαστικής διεργασίας **x**(t) είναι

$$R_x(t_1,t_2)=E\{x(t_1)x(t_2)\}=\int_{-\infty}^{\infty}\int x_2 x_1 f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1 dx_2$$

Εάν η διεργασία είναι stationary, τότε

$E\{x(t_1)x(t_2)\}= R_x(t_1-t_2)= R_x(\tau)$, όπου $\tau= t_1-t_2$

Wide-sense stationary

Stationary υπό την ευρεία έννοια σημαίνει ότι η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση είναι ανεξάρτητα από την αρχή του χρόνου.

Άρα

$E\{x(t)\}=n_x$ (σταθερή, ανεξάρτητη από χρόνο)

$E\{x(t)x(t+\tau)\}= R_x(\tau)$ (εξαρτάται μόνο από την διαφορά τ)

Οι στοχ. διεργ. που θα μελετούμε εδώ θα είναι πάντοτε

wide sense stationary and ergodic in the mean and autocorrelation

Power Spectrum S(ω)

The Power spectrum **S(ω)** of a stochastic stationary process is defined as the the Fourier Transform of its autocorrelation R(τ)

R(τ)↔S(ω)

S(ω) is defined only for stationary processes.

For ergodic process S(ω)= $\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left|\int_{-T}^{T}\underset{\sim}{x}(t)e^{-j\omega t}dt\right|^2$

Ιδιότητες Αυτοσυσχέτισης

R(τ)	πραγματική συνάρτηση
R(τ) = R(-τ)	συμμετρική
R(0)≥R(τ)	
S(ω) ≥ 0	Το φάσμα είναι πάντοτε θετικό

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)d\omega = R(0) = \sigma_X^2$$

$$R(\infty) = |E\{x(t)\}|^2$$

Εάν x(t) δεν είναι περιοδική συνάρτηση

Ερμηνεία διαφόρων μέσων τιμών για εργοδικές στοχαστικές Διεργασίες <.>

Εάν x(t) είναι η τάση πάνω σε μία αντίσταση 1 Ω

$$\left(\langle f(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t)\,dt \right)$$

$E\{x(t)\}=\langle x(t)\rangle$	συνεχής συνιστώσα
$E\{x(t)\}^2=\lvert\langle x(t)\rangle\rvert^2$	ισχύς συνεχούς ρεύματος
$E\{\lvert x(t)\rvert^2\} =\langle\lvert x(t)\rvert^2\rangle$	ολική ισχύς
$\sigma^2_X= E\{\lvert x(t)\rvert^2\} -E\{x(t)\}^2$	ισχύς εναλλασσομένου ρεύματος

Crosscorrelation $\mathbf{R_{xy}(t_1,t_2)}$

Η ετεροσυσχέτιση δύο στοχαστικών διεργασιών **x**(t) και **y**(t) είναι

$$R_{xy}(t_1,t_2)=E\{x(t_1)y(t_2)\}$$

Εάν οι διεργασίες είναι stationary, τότε

$E\{x(t_1)y(t_2)\}= R_{xy}(t_1-t_2)= R_{xy}(\tau)$, όπου $\tau= t_1-t_2$

και

$$\mathbf{R_{xy}(\tau)\leftrightarrow S_{xy}(\omega)}$$

$R_{xy}(t_1,t_2)=E\{x(t_1)y(t_2)\}= E\{x(t_1)\}E\{y(t_2)\}$	**x**(t) και **y**(t) είναι ασυσχέτιστες (**uncorrelated**)
$R_{xy}(t_1,t_2)=E\{x(t_1)y(t_2)\}=0$	**x**(t) και **y**(t) είναι ορθογώνιες (**orthogonal**)
Εάν οι τ.μ. $x(t_1), x(t_2),\ldots x(t_N)$ και $y(t_1), y(t_2),\ldots y(t_N)$ είναι ανεξάρτητες	**x**(t) και **y**(t) είναι ανεξάρτητες (**independent**)

Λευκός θόρυβος (white noise)

Λευκός Θόρυβος με Gaussian κατανομή

Συμβολισμοί και Διανύσματα

- Θεωρήσεις
  - Οι μετρήσεις (χαρακτηριστικά) είναι *n*-διάστατα διανύσματα **x**

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$$

  - Τα πρότυπα (κλάσεις) Ω_i, *M* στο πλήθος, υπολογίζονται από το σύνολο των χαρακτηριστικών μέσω της γενικής συνάρτησης απόφασης

$$\{\mathbf{x}\} \xrightarrow{d(\mathbf{x})} \{\Omega\}$$

- Αποστάσεις
  - Ευκλείδια

$$d_\varepsilon(\mathbf{x},\mathbf{y}) = ((\mathbf{x}-\mathbf{y})^T(\mathbf{x}-\mathbf{y}))^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{1/2}$$

  - City block

$$d_c(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} abs(x_i - y_i)$$

  - Chebychev

$$d_T(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max_i (x_i - y_i)$$

Μερικές χρήσιμες σχέσεις

$$\int_a^b u(t)dv(t) = u(t)v(t)\Big|_{t=a}^{b} - \int_a^b v(t)du(t)$$

Παράγωγος Ολοκληρώματος (τύπος του Leibniz)

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} f(\tau,t)d\tau = f(\varphi_2(t),t)\frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t} - f(\varphi_1(t),t)\frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t}) + \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f(\tau,t)}{\partial t}d\tau$$

Ανισότητα του Swartz

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt \text{ with equality if } f(t) = kg^*(t)$$