ΔΗΜΟΚΡΙΤΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΡΑΚΗΣ

Ειδικά Κεφάλαια Επεξεργασίας Σημάτων

ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ ΣΗΜΑΤΟΣ

Χριστόδουλος Χαμζάς

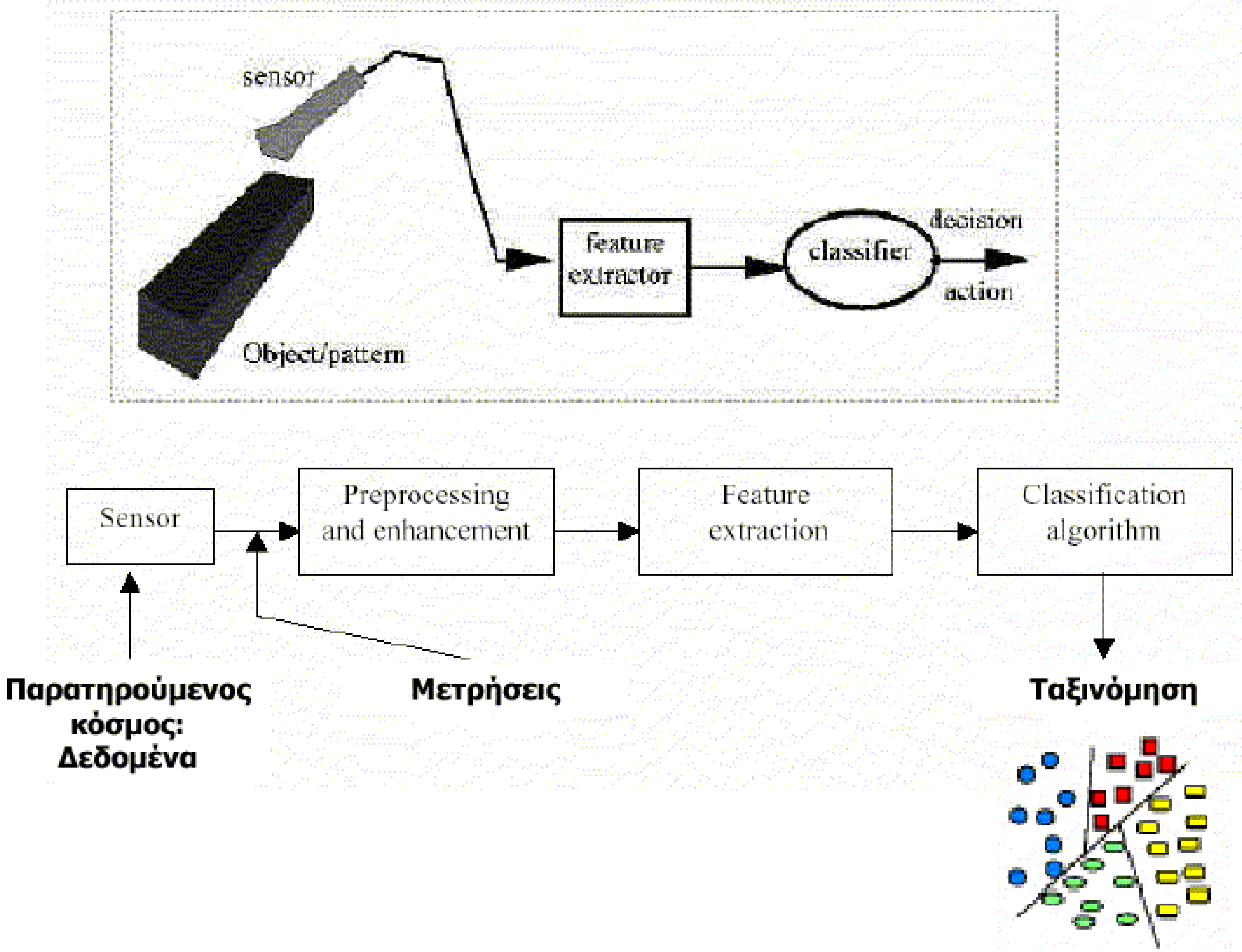
13-03-2008

Τμήμα Ηλεκτρολόγων Μηχανικών & Μηχανικών Υπολογιστών

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

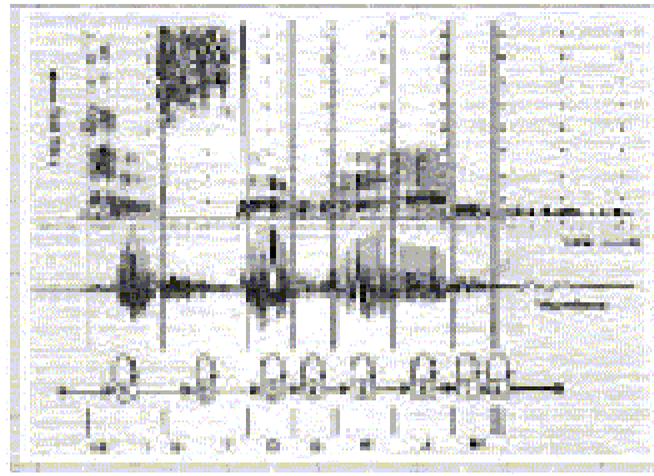
- Θεωρία Ταξινόμησης (Classification Theory) Ταξινόμηση αντικειμένων σε ξεχωριστές κατηγορίες ή κλάσεις
- Στατιστική Θεωρία Αποφάσεων παρέχει τις μαθηματικές διαδικασίες για την αναπαράσταση χαρακτηριστικών με την μορφή διανυσμάτων.

Τυπικό Σύστημα

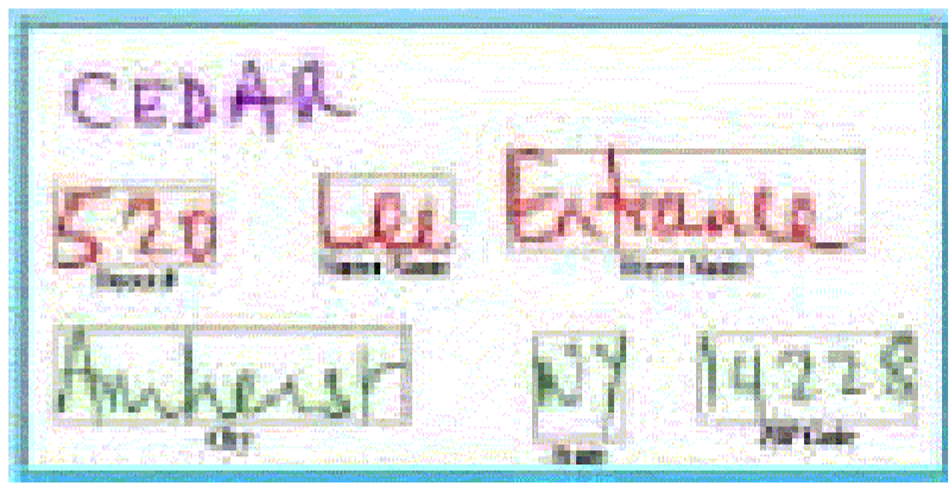


Μηχανική Αντίληψη (Machine Perception)

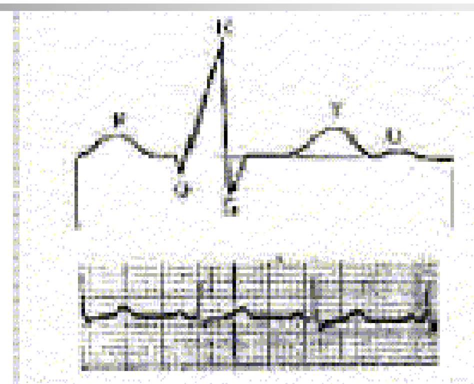
Κατασκευή μηχανής (προγράμματος) που μπορεί να αναγνωρίζει και να ταξινομεί πρότυπα (patterns).

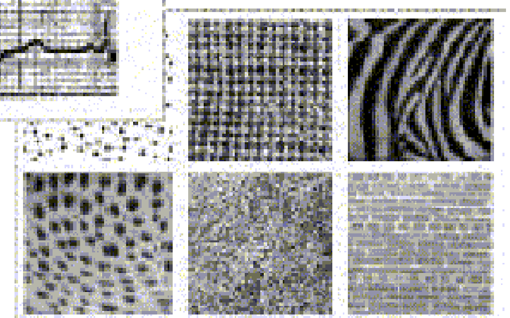


- Αναγνώριση ομιλίας–ομιλητή (Speech recognition/speaker identification)
- Αναγνώριση χειρόγραφων χαρακτήρων (Hand written character recognition)
- Οπτική αναγνώριση χαρακτήρων (Optical character recognition - OCR)
- Αναγνώριση δακτυλικών αποτυπωμάτων (Fingerprint identification)

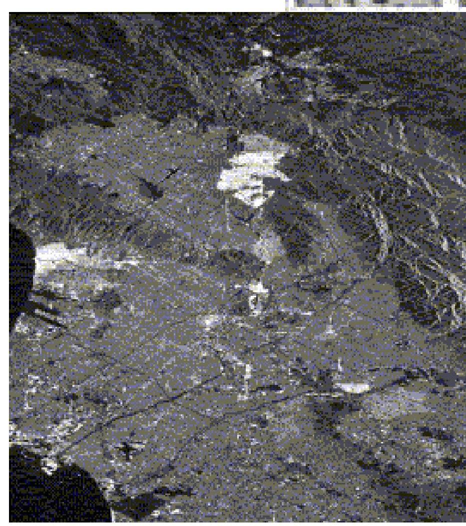


Εφαρμογές





- Αναγνώριση ακολουθιών DNA (DNA sequence identification)
- Τεστ μαστογραφίας (X-Ray Mammography test)
- Διάγνωση μέσω ηλεκτρο-εγκεφαλογραφημάτων (EEG, Neurological disorder diagnosis)
- Διάγνωση μέσω ηλεκτρο-καρδιογραφημάτων (ECG, Cardiovascular disorder diagnosis)
- Αναγνώριση με σάρωση της ίριδας (Iris scan identification)
- Τοπογραφική τηλεπισκόπηση (Topographical remote sensing)



Ένα παράδειγμα

- "Ταξινόμηση ψαριών σε ένα ταινιόδρομο σύμφωνα με το είδος, με χρήση ενός οπτικού αισθητηρίου"

Λαβράκι

Είδος

Σολομός

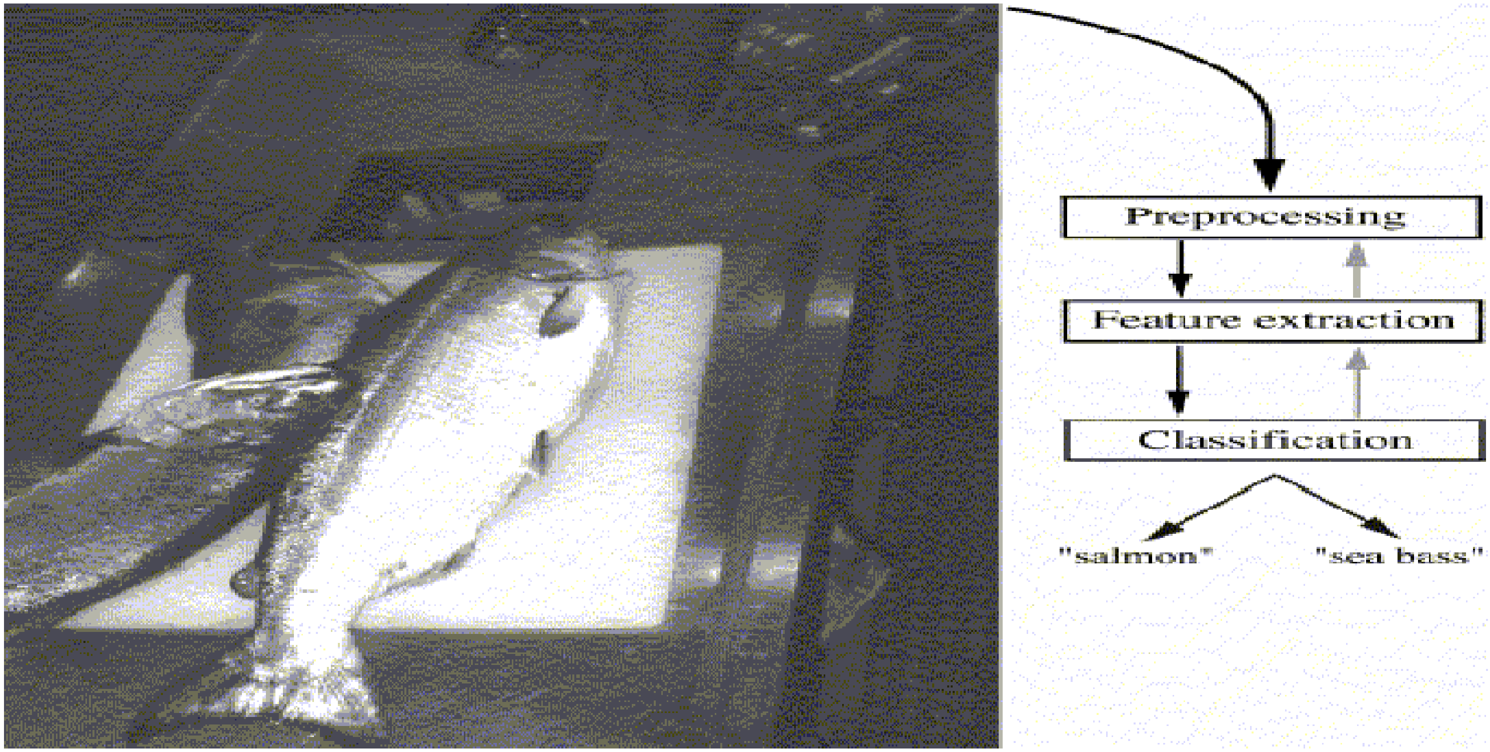
Ανάλυση του προβλήματος

- Τοποθετούμε την κάμερα για την λήψη ορισμένου αριθμού εικόνων οι οποίες στέλνονται στον εξαγωγέα χαρακτηριστικών (feature extractor) ο οποίος ελαττώνει τα δεδομένα σε ένα μικρό αριθμό χαρακτηριστικών (features).

    - Μήκος
    - Φωτεινότητα
    - Πλάτος
    - Αριθμός και σχήμα των πτερυγίων
    - Θέση του στόματος, κτλ...

- Αυτό είναι ένα μικρό σύνολο ιδιοτήτων οι τιμές των οποίων δίδονται ως είσοδοι στη μονάδα του ταξινομητή (classifier).

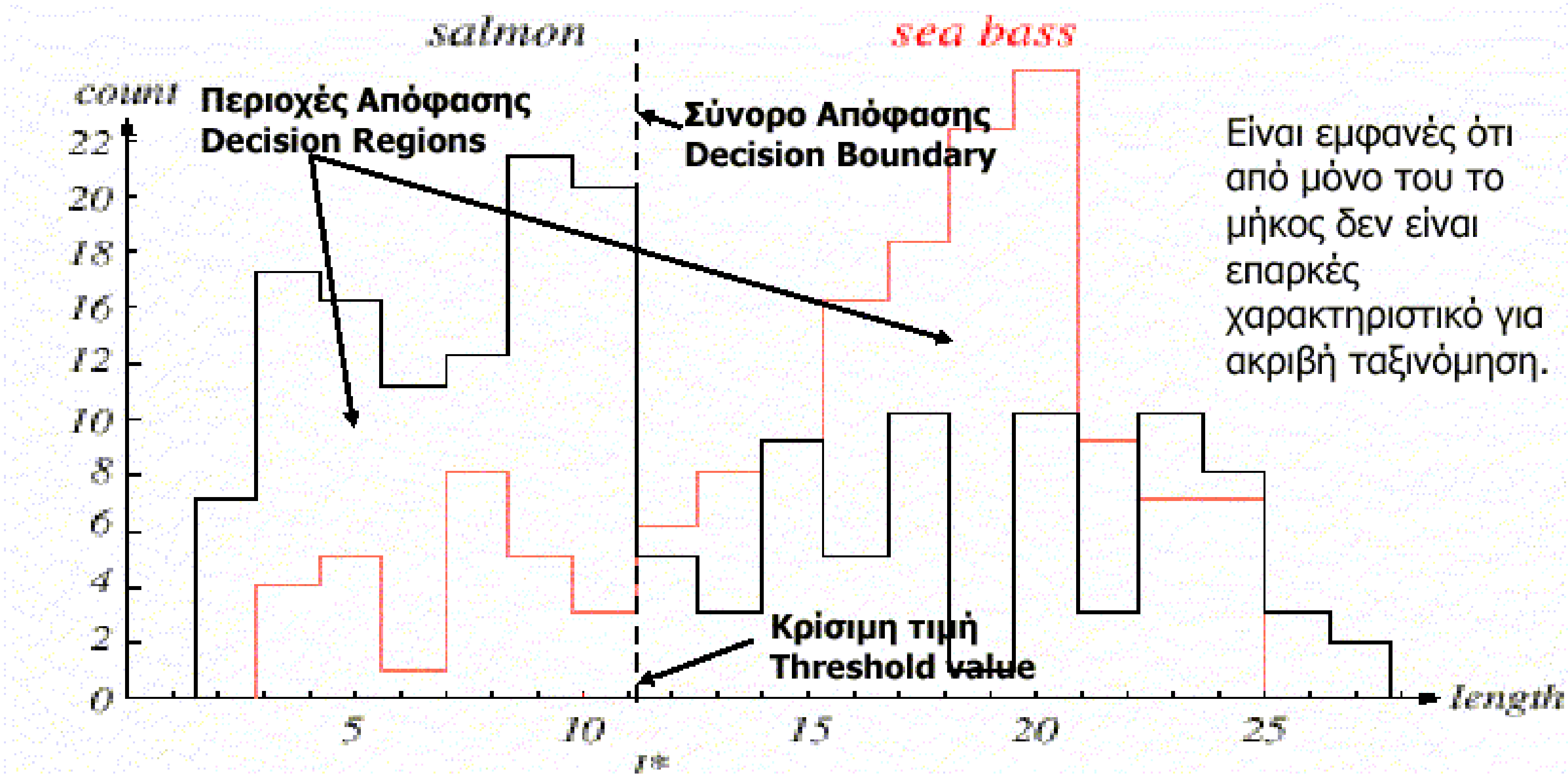
Σύστημα Ταξινόμησης



The objects to be classified are first sensed by a transducer (camera), whose signals are preprocessed. Next the features are extracted and finally the classification is emitted, here either "salmon" or "sea bass." Although the information flow is often chosen to be from the source to the classifier, some systems employ information flow in which earlier levels of processing can be altered based on the tentative or preliminary response in later levels (gray arrows). Yet others combine two or more stages into a unified step, such as simultaneous segmentation and feature extraction.

Ιστόγραμμα μήκους

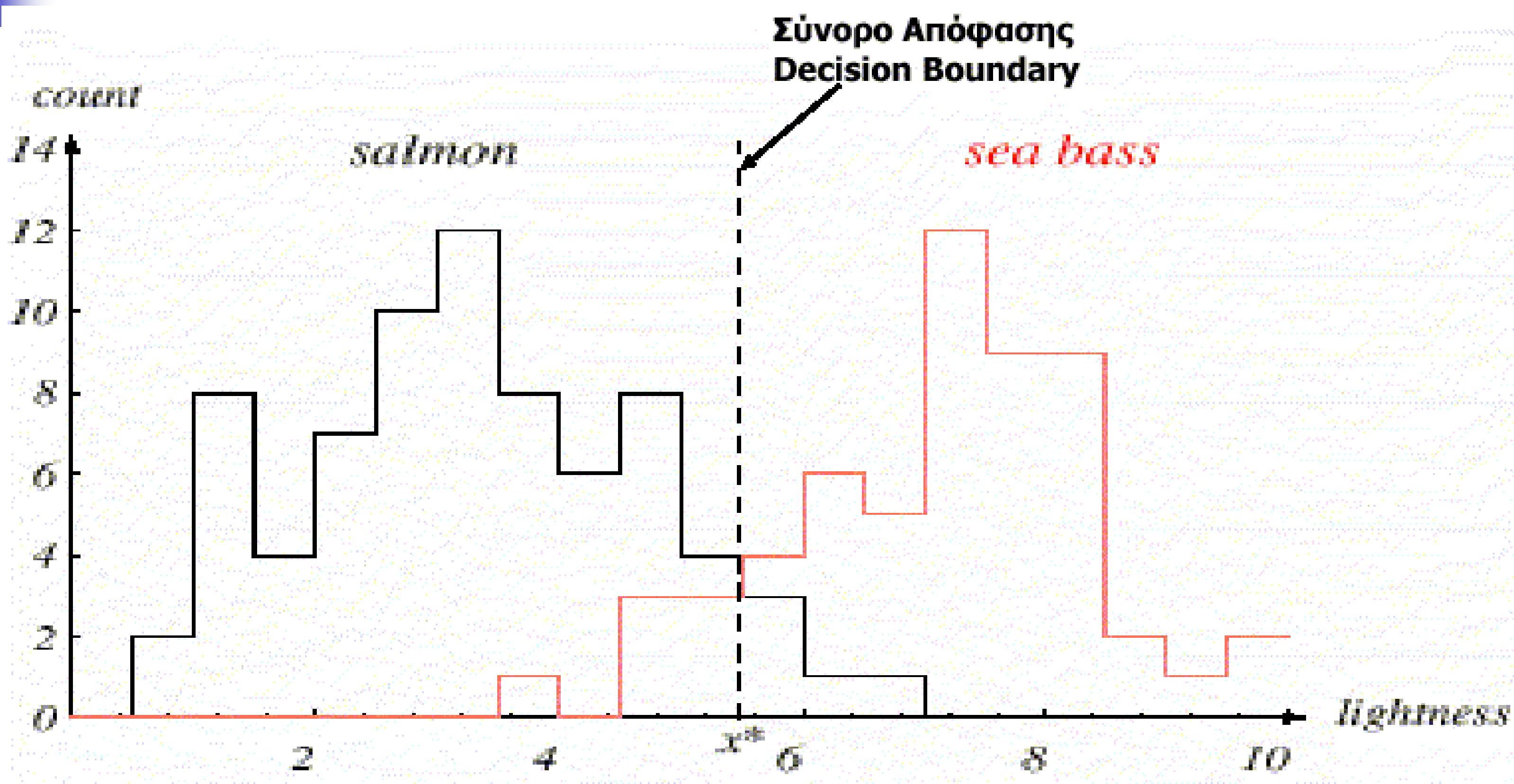
➢Επιλογή του μήκους ως μοναδικού χαρακτηριστικού για την ταξινόμηση:



Είναι εμφανές ότι από μόνο του το μήκος δεν είναι επαρκές χαρακτηριστικό για ακριβή ταξινόμηση.

Ιστογράμματα του μήκους για τις δύο κατηγορίες. Δεν υπάρχει μία κρίσιμη τιμή μήκους που να μπορεί να διαχωρίζει ξεκάθαρα τις δύο κατηγορίες. Η χρήση μόνο του μήκους δημιουργεί σφάλματα. Η τιμή l^* δημιουργεί το μικρότερο αριθμό λαθών κατά μέσο όρο.

Ιστόγραμμα φωτεινότητας



Ιστογράμματα της φωτεινότητας για τις δύο κατηγορίες. Όπως και στην περίπτωση χρήσης του μήκους, δεν υπάρχει μία κρίσιμη τιμή φωτεινότητας που να μπορεί να διαχωρίζει ξεκάθαρα τις δύο κατηγορίες. Η τιμή l^* δημιουργεί το μικρότερο αριθμό λαθών κατά μέσο όρο.

Έννοια του κόστους

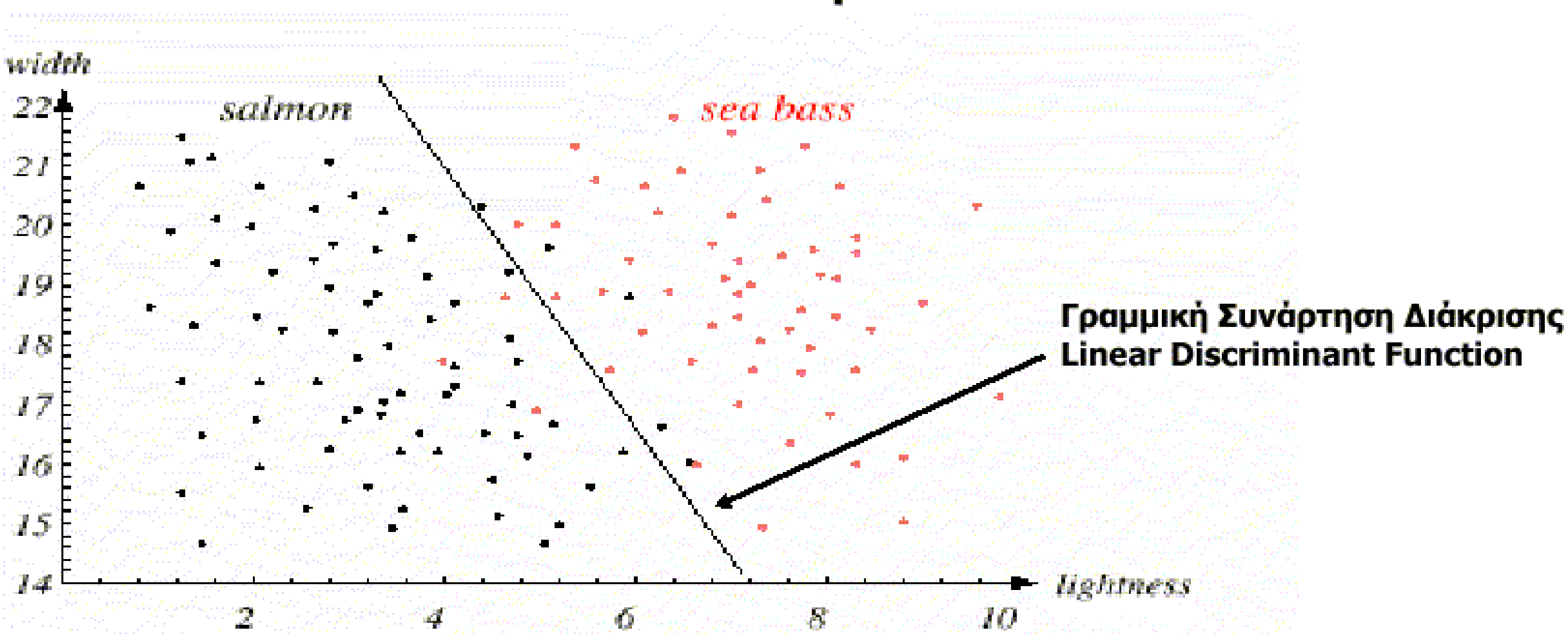
- Εμφανής η σχέση μεταξύ της επιλογής της κρίσιμης τιμής (threshold) και του κόστους της λάθος ταξινόμησης.
- Στον πραγματικό κόσμο, διαφορετικά λάθη συνδεόνται με διαφορετικά κόστη.
- Στο πρόβλημα διαχωρισμού σολομού από λαβράκι, το κόστος λανθασμένης ταξινόμησης λαβρακίου ως σολομού είναι μεγαλύτερο από αυτό της λανθασμένης ταξινόμησης σολομού ως λαβρακίου!
- Συνεπώς μετακίνησε το σύνορο απόφασης σε πιο χαμηλές τιμές (μήκους ή φωτεινότητας), ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λαβρακίων που λανθασμένα ταξινομούνται ως σολομοί!!
- Αυτό είναι δουλειά της Στατιστικής Θεωρίας Αποφάσεων (Decision Theory).

Διάνυσμα χαρακτηριστικών

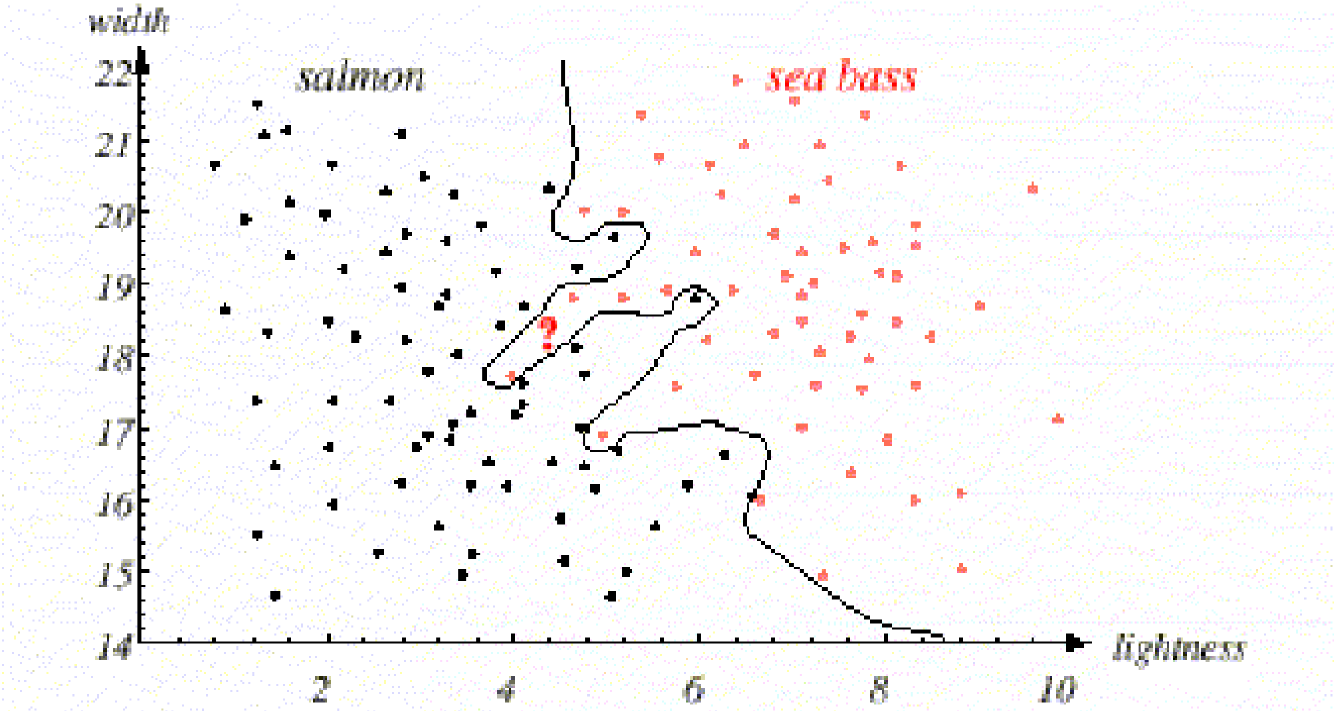
- Χρήση φωτεινότητας και μήκους για ταξινόμηση:

Ψάρι → $x^T = [x_1, x_2]$

Φωτεινότητα Μήκος



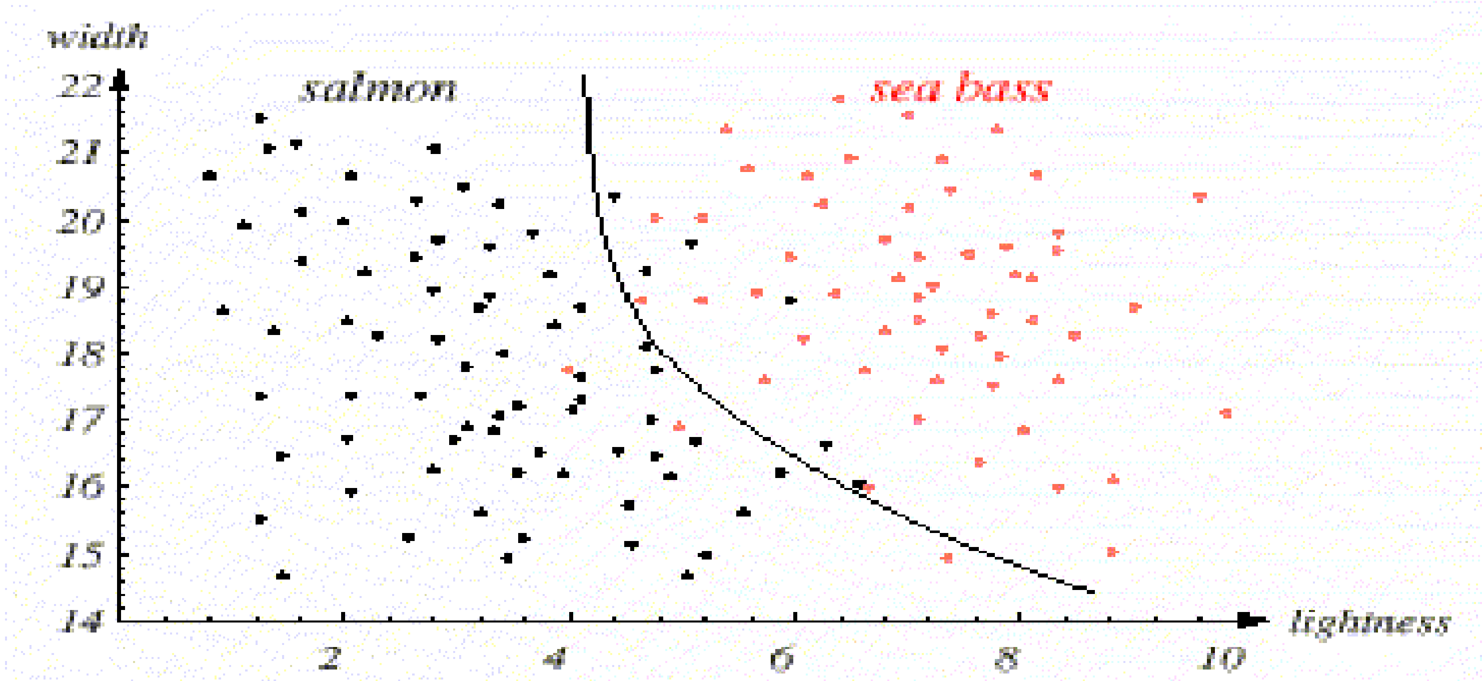
Μη γραμμικές συναρτήσεις διάκρισης



Σύνθετα μοντέλα για το ψάρι οδηγούν σε περίπλοκα σύνορα απόφασης: Μία τέτοια επιλογή βασίζεται και οδηγεί σε τέλεια ταξινόμηση των δειγμάτων με εκ των προτέρων γνωστή κλάση (που εκπαιδεύουν τον ταξινομητή) αλλά μπορεί να οδηγεί σε κακή ταξινόμηση νέων προτύπων. Π.χ., το νέο σημείο **?** είναι προφανώς σολομός με μεγάλη πιθανότητα, αλλά η συνάρτηση διάκρισης οδηγεί στην ταξινόμησή του ως λαβράκι.

Γενίκευση της Σχεδίασης του Ταξινομητή

- Ο κεντρικός στόχος είναι η ταξινόμηση νέων δειγμάτων εισόδου



Η συνάρτηση διάκρισης πρέπει να συμβιβάζει την ανάγκη για όσο το δυνατό καλύτερη ταξινόμηση των δειγμάτων εκπαίδευσης του συστήματος με την ανάγκη για απλούς ταξινομητές. Ακολουθώντας αυτήν την αρχή πετυχαίνουμε την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια στην ταξινόμηση νέων δειγμάτων.

Μπευζιανή θεωρία αποφάσεων

- Στατιστικά βέλτιστη ταξινόμηση.
- Βασίζεται στην περιγραφή του προβλήματος ταξινόμησης με πιθανοτικούς όρους.
- Η θεωρία υποθέτει:
  - Το πρόβλημα απόφασης μπορεί να τεθεί με όρους πιθανοτήτων
  - Είναι γνωστές όλες οι απαραίτητες τιμές και συναρτήσεις πιθανότητας (στην πράξη αυτό δεν ισχύει).

ΈΝΑ Πρόβλημα Εκτίμησης

- Λαμβάνουμε το σήμα (μέτρηση)

$$x(t) = \begin{cases} n(t) \\ s(t) + n(t) \end{cases}$$

- n(t) είναι ο θόρυβος και s(t) είναι το σήμα
- Υπόθεση 1 H0 : Δεν υπάρχει το σήμα και x(t) είναι μόνο θόρυβος
- Υπόθεση 2 H1 : υπάρχει το σήμα και x(t)=s(t)+n(t)

Τι ξέρουμε;

- The signal s(t) is known and we want to know if it is present or not.
- n(t) is a stochastic process with known statistics.
- The observer must base its decision on
  - Samples of x(t) (digital x(nT))
  - The entire x(t) (analog)
- We shall address the digital problem:
- We assume that (a) s(t) and n(t) are independent
- (b) The samples of n(t) are uncorrelated

Στόχος;

- Design the optimum system:

The system can be linear or nonlinear

System means → Hardware device
System means → Software program

- Criteria:
  1. The system must be optimum with respect to a criterion which depends on the particular problem.
  2. Sometimes we are satisfied with a sub optimum system because it is much simpler than the optimum.

- Parametric detection: if we know the p.d.f of n(t) (complete description)
- Non parametric detection: if we don't have a complete description of n(t). (ex. : we only know)
- Robust detector: is called a detector, which performs within acceptable levels even if the assumption regarding noise is violated or otherwise performs equally, well in a different environment than the assumed one.

  Example:

  Assume that noise is Gaussian and then investigate its performance under noise with another distribution.

ΕΙΔΗ ΛΑΘΩΝ

- Due to the presence of noise we can perform errors in our decisions
- (1). ***Error of the first kind***: P_{e0}. It is the probability to decide that the signal is present when it is not or choose H1 when H0 is true.
- (2). ***Error of the second kind***: P_{e1}. When the signal is present you decide that it is not or choose H0 when H1 is true.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1 (Τηλεπικοινωνίες)

- Detection of a pulse (PCM or radar e.t.c)

Case A

Assumption:

1. s(t) = {A or 0}
2. Probability of s(t) = A = P_1
3. Probability of s(t) = 0 = 1-P_1
4. Probability density function of n(t) is known
5. We must base our decision on one sample

Criterion: Minimize the probability of error:

$$Pe = P_1 P_{e1} + (1-P_1) P_{e0}$$

Λύση

- Decision will be based on $x[n]=x_1$. If x_1 is in one Range R_1 then we decide that H_1 is true and our problem is to find R_1.

$$\mathrm{P_{e0}} = \{\mathrm{x_1 \text{ is in } R_1 \text{ but s(t) is not present}}\} = \int_{R_1} f_{x_1}(x_1 / s(t) = 0)dx$$

$$P_{e1} = \int_{1-R_1} f_{x_1}(x_1 / s(t) = A)dx = 1 - \int_{R_1} f_{x_1}(x_1 / s(t) = A)dx$$

$$P_e = (1 - p_1)\int_{R_1} f_{x_1}(x_1 / s(t) = 0)dx + p_1\left(1 - \int_{R_1} f_{x_1}(x_1 / s(t) = A)dx\right) =$$

$$= p_1 + \int_{R_1} [(1 - p_1) f_{x_1}(x/0) - p_1 f_{x_1}(x/A)]dx$$

Λύση (συνέχεια)

- Διάλεξε το R_1 έτσι ώστε η πιθανότητα λάθους να είναι ελάχιστη

ΑΡΑ ΠΡΕΠΕΙ

$$[(1-P1)\,f_{x_1}(x/0)] - P_1\, f_{x_1}(x/A)] < 0$$

$$\boxed{l(x_1) = \frac{f_{x_1}(x/A)}{f_{x_1}(x/0)} > \frac{1-P_1}{P_1}}$$

- **Το *l(x1)* πιθανοφάνεια *(likelihood)***
- Μερικές φορές είναι καλύτερα να παίρνουμε τον λογάριθμο

$$\ln l(x_1) > \ln \frac{1-P_1}{P_1}$$

Παράδειγμα 1

- Ο θόρυβος έχει κατανομή Gaussian με μέση τιμή μηδέν και διασπορά σ².

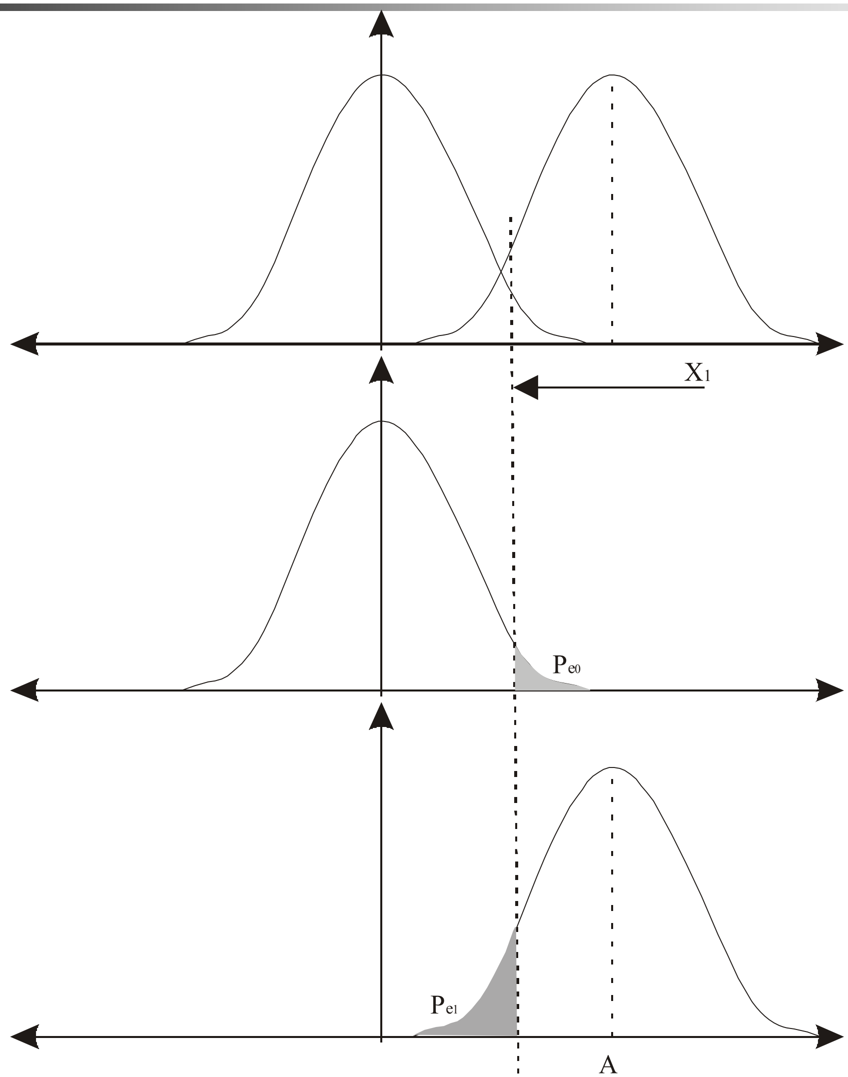
$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-(x_1-A)^2}{2\sigma_x{}^2}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{\frac{-x_1{}^2}{2\sigma_x{}^2}}} \geq \frac{1-P_1}{P_1} \Rightarrow \left(\frac{-(x_1-A)^2+x_1{}^2}{2\sigma_x{}^2}\right) \geq \ln\frac{1-P_1}{P_1} \Rightarrow \frac{x_1 A}{\sigma_x{}^2} - \frac{A^2}{2\sigma_x{}^2} \geq \ln\frac{1-P_1}{P_1}$$

$$\boxed{x_1 > \frac{A}{2} + \frac{\sigma_x{}^2}{A}\ln\frac{1-P_1}{P_1} = D}$$

$$P_e = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(p_1 erf\,\frac{A-D}{\sqrt{2}\sigma_x} + (1-p_1)erf\,\frac{D}{\sqrt{2}\sigma_x}\right)$$

- *Ορισμός:* Συνάρτηση Σφαλματος

$$erf(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$$



X1
Pe0
Pe1
A

Αριθμητική εφαρμογή

- Computer transmits 0,1,… Each pulse occupies T sec and we sample every T sec with

$P_1=P_2=1/2$, $\sigma^2=2$, choose A such that $P_e=10^{-5}$

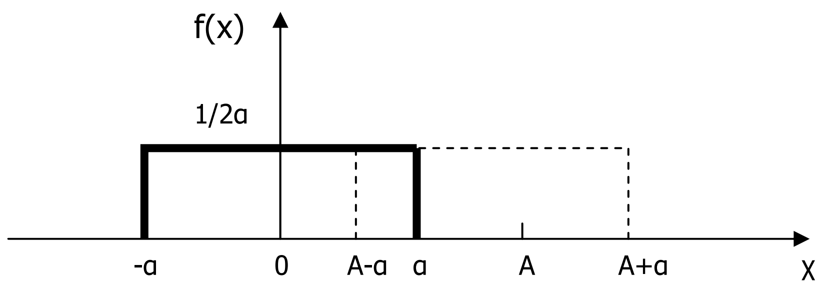
$$D=\frac{A}{2}\Rightarrow Pe=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cdot\left[2erf\,\frac{A}{2\cdot 2}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left[erf\,\frac{A}{4}\right]$$

$$\Rightarrow erf\,\frac{A}{4}=2\cdot\left[\frac{1}{2}-Pe\right]=0.99998\Rightarrow\frac{A}{4}=3\Rightarrow A=12$$

Let T=1μs on the average we are going to perform 10 errors every second!

Παράδειγμα 2

- Τι γίνεται εάν ο θόρυβος έχει ομοιόμορφη κατανομή στο [-α,α]



Εάν Α-α $\geq$ α τότε P_e=0 και R_1=x≥A-α

Εάν Α-α<α (Α<2α) τότε ?

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

- Λαμβάνουμε 2 σήματα και γνωρίζουμε την κατανομή του καθενός.
- Λαμβάνουμε μία μέτρηση και θέλουμε να δούμε εάν έχουμε το σήμα 1 ή το σήμα 2

Αναγνώριση Προτύπων (Παράδειγμα αναγνώρισης σολομού ή λαυράκι)