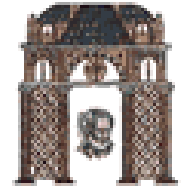


Ειδικά Κεφάλαια Επεξεργασίας Σημάτων

Βασικά θεωρίας πιθανοτήτων
Τυχαίες Μεταβλητές
Στοχαστικές Διεργασίες
Διανύσματα

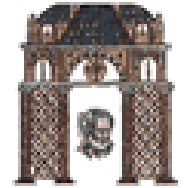
Καθηγητής Χριστόδουλος Χαμζάς

20-03-2008



Χώρος Δειγμάτων - Γεγονότα

- Δείγμα
 - Το αποτέλεσμα ενός τυχαίου πειράματος
- Χώρος δειγμάτων S
 - Το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων
 - Διακριτός και συνεχής
- Γεγονότα
 - Ένα σύνολο αποτελεσμάτων, άρα ένα υποσύνολο του S



Λειτουργίες συνόλων

- Ένωση $A \cup B$
- Τομή $A \cap B$
- Συμπλήρωμα A^c

- Ιδιότητες

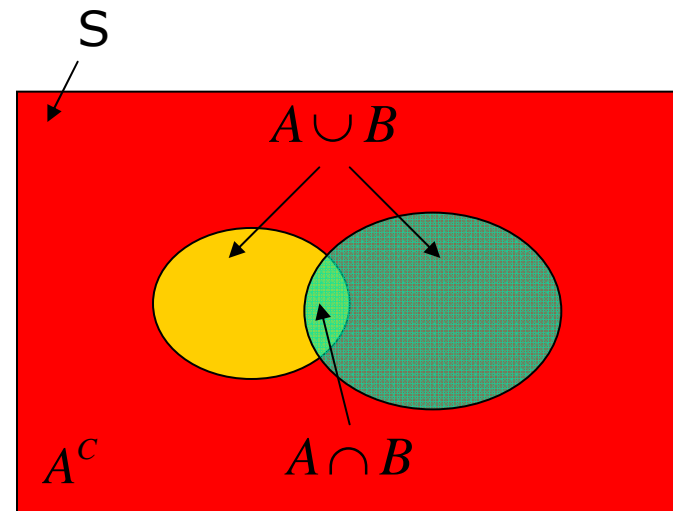
$$A \cup B = B \cup A$$

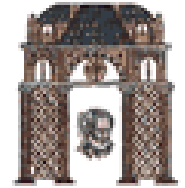
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Κανόνας De Morgan

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$





Αξιώματα και ιδιότητες

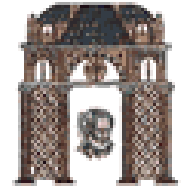
■ Αξιώματα

- $0 \leq P[A]$
- $P[S] = 1$
- Αν $A \cap B = \emptyset$
 $P[A \cup B] = P[A] + P[B]$
- Αν A_1, A_2, \dots αμοιβαία αποκλειόμενα

$$P\left[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right] = \sum_{k=1}^{\infty} P[A_k]$$

■ Ιδιότητες

- $P[A^c] = 1 - P[A]$
- $P[A] \leq 1$
- $P[\emptyset] = 0$
- $P[A \cup B] =$
 $P[A] + P[B] - P[A \cap B]$



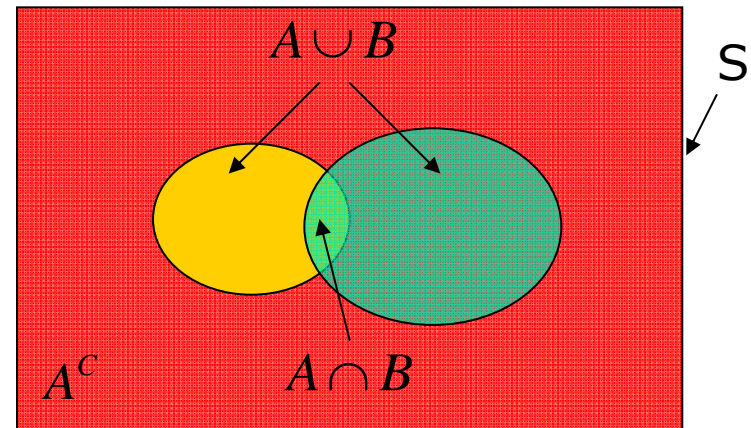
Υπό συνθήκη πιθανότητα

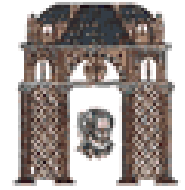
- Υπό συνθήκη πιθανότητα γεγονός A υπό την προϋπόθεση ότι έχει συμβεί το γεγονός B

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

- Αν B_1, B_2, \dots, B_n είναι ένας **διαχωρισμός** του S , τότε

$$P[A] = P[A|B_1]P[B_1] + \dots + P[A|B_j]P[B_j]$$





Κανόνας Bayes - Ανεξαρτησία

- Αν B_1, \dots, B_n είναι ένας **διαχωρισμός** του S ΤΟΤΕ

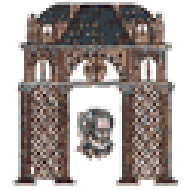
$$P[B_j | A] = \frac{P[A \cap B_j]}{P[A]}$$

$$= \frac{P[A | B_j] P[B_j]}{\sum_{k=1}^n P[A | B_k] P[B_k]}$$

$$posterior = \frac{likelihood \times prior}{evidence}$$

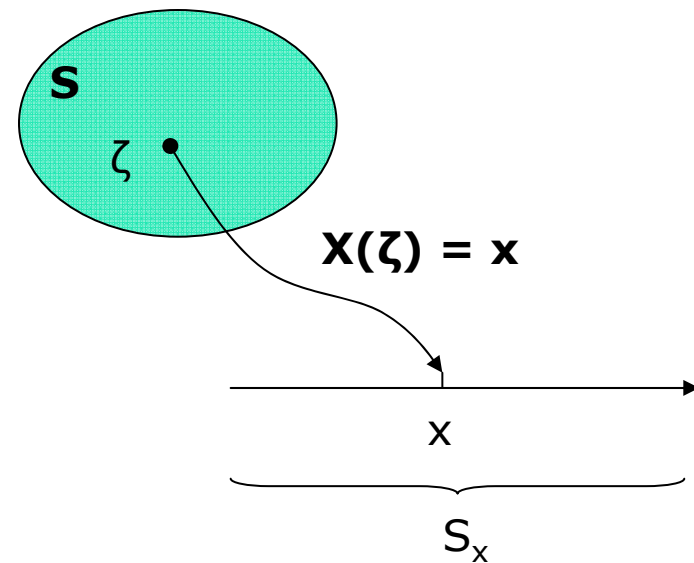
- Τα γεγονότα A και B είναι **ανεξάρτητα** αν

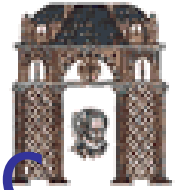
$$P[A \cap B] = P[A] P[B]$$



Τυχαίες Μεταβλητές

- Η έννοια της τυχαίας μεταβλητής
 - Το αποτέλεσμα δεν είναι πάντα ένας αριθμός
 - Αποδίδει μια αριθμητική τιμή στο αποτέλεσμα ενός πειράματος
- Ορισμός
 - Μία συνάρτηση X που αντιστοιχεί έναν πραγματικό αριθμό $X(\zeta)$ σε κάθε αποτέλεσμα ζ στον χώρο των δειγμάτων ενός τυχαίου πειράματος





Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας

- Ορίζεται ως η πιθανότητα του γεγονότος $\{X \leq x\}$

$$F_X(x) = P[X \leq x]$$

- Ιδιότητες

$$0 \leq F_X(x) \leq 1$$

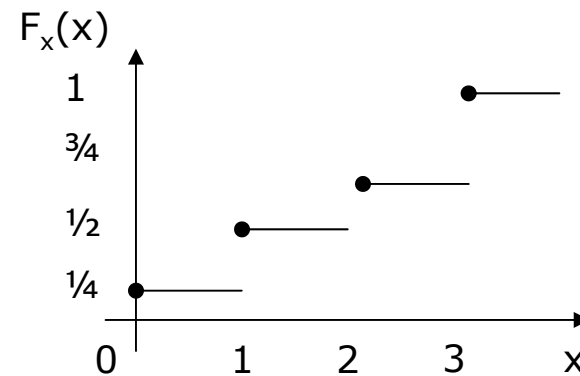
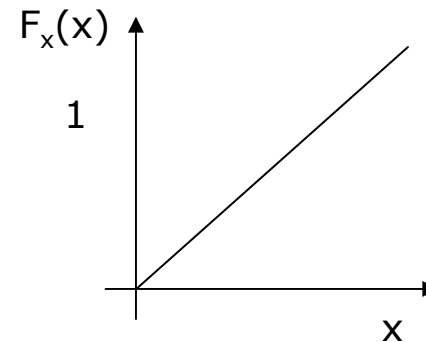
$$\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$$

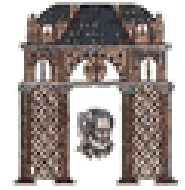
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$$

$$\text{if } a < b \text{ then } F_X(a) \leq F_X(b)$$

$$P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$$

$$P[X > x] = 1 - F_X(x)$$





Τύποι τυχαίων μεταβλητών

- Συνεχείς

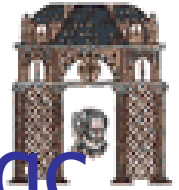
$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

- Διακριτές

$$P_X(x_k) = P[X = x_k]$$

$$F_X(x) = \sum_k P_X[x_k] u(x - x_k)$$



Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

- Η pdf υπολογίζεται από την $f_X(x)$

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

- Ιδιότητες

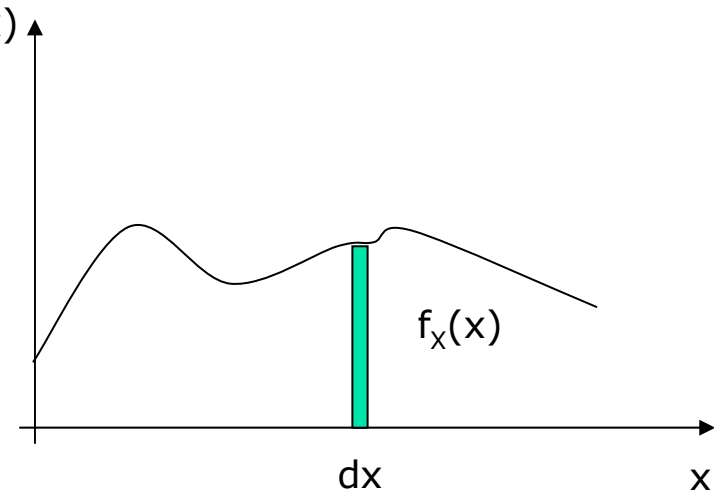
$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x) dx$$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

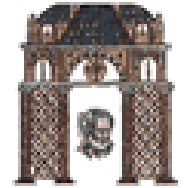
$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) dt$$

- Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές

$$f_X(x) = \sum_k P_X[x_k] \delta(x - x_k)$$



$$P[x \leq X \leq x + dx] = f_X(x) dx$$



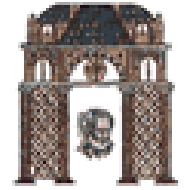
Υπό συνθήκη κατανομή

- Υπό συνθήκη συνάρτηση κατανομής της X δοσμένου του γεγονότος B

$$F_X(x|B) = \frac{P[X \leq x \cap B]}{P[B]}$$

- Η υπό συνθήκη pdf είναι

$$f_X(x|B) = \frac{dF_X(x|B)}{dx}$$



Μέση τιμή και μεταβλητότητα

- Η αναμενόμενη ή μέση τιμή της X είναι

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t) dt$$

$$E[X] = \sum_k x_k P_X(x_k)$$

- Ιδιότητες

$$E[c] = c$$

$$E[cX] = cE[X]$$

$$E[X + c] = E[X] + c$$

- Η μεταβλητότητα της X είναι

$$Var[X] = \sigma^2 = E[(X - E[X])^2]$$

- Η τυπική απόκλιση της X είναι

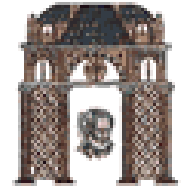
$$Std[X] = \sigma = \sqrt{Var[X]}$$

- Ιδιότητες

$$Var[c] = 0$$

$$Var[cX] = c^2 Var[X]$$

$$Var[X + c] = Var[X]$$



Κοινές κατανομές

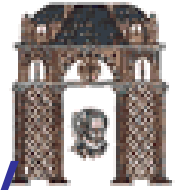
- Κοινή συνάρτηση κατανομής των X, Y

$$\begin{aligned} p_{XY} [x_j, y_k] &= P[\{X = x_j\} \cap \{Y = y_k\}] \\ &= P[X = x_j, Y = y_k] \end{aligned}$$

$$F_{XY}(x_1, y_1) = P[X \leq x_1, Y \leq y_1]$$

- Κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X, Y

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F_{XY}(x, y)$$



Ανεξαρτησία δύο Τυχαίων Μεταβλητών

- Οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν τα $\{X \leq x\}$ και $\{Y \leq y\}$ είναι ανεξάρτητα για οποιονδήποτε συνδυασμό των x, y

$$F_{XY}(x, y) = F_X(x) F_Y(y)$$

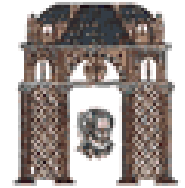
$$f_{XY}(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

- Συμμεταβλητότητα των X και Y

$$E\{(X - m_x), (Y - m_y)\} = \int \int (x - m_x)(y - m_y) f_{XY}(x, y) dx dy$$

- Συσχέτιση των X και Y

$$E\{X, Y\} = \int \int xyf(x, y) dx dy$$



Κανονική Κατανομή (Gauss)

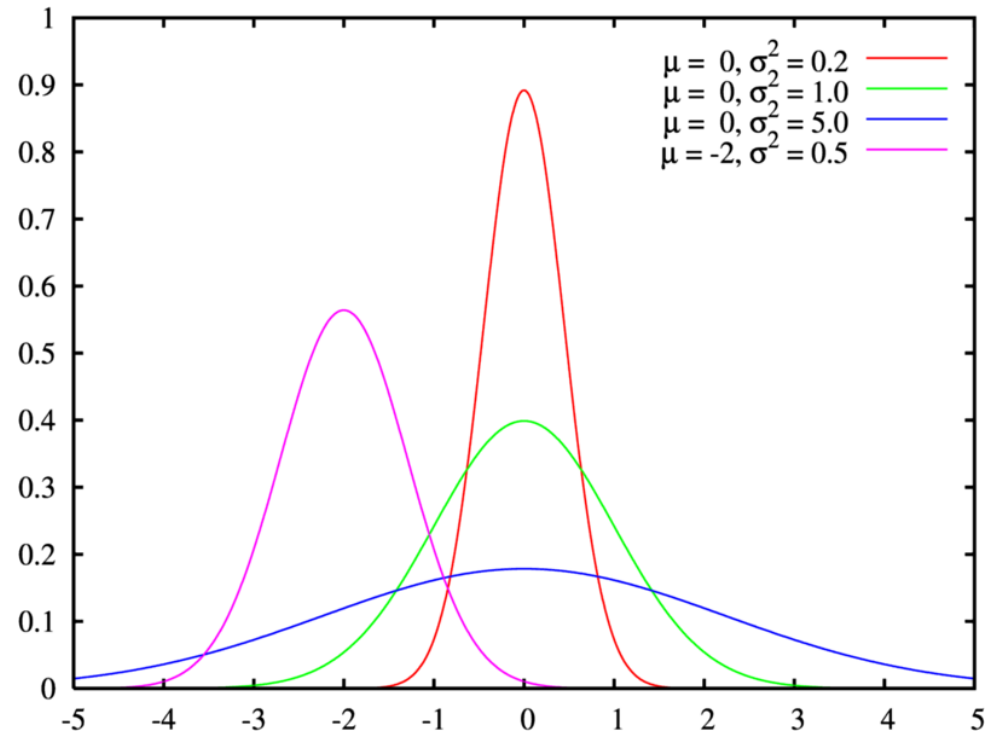
$$N(\mu, \sigma) = p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

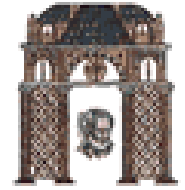
$$E\{1\} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1$$

$$E\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx = \mu$$

$$E\{(x-\mu)^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 p(x) dx = \sigma^2$$

$$\Pr(|x-\mu| \leq \sigma) \cong 0.68, \quad \Pr(|x-\mu| \leq 2\sigma) \cong 0.95, \quad \Pr(|x-\mu| \leq 3\sigma) \cong 0.997,$$





Gaussian Distribution (συν.)

Συνάρτηση Σφάλματος

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

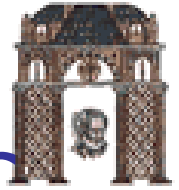
με $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(1) = 0.84$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$
για $N(\mu, \sigma)$

$$P(|x - \mu| \leq A) = \operatorname{erf}\left(\frac{A}{\sigma\sqrt{2}}\right)$$

$$P(x \leq a) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{2}}\right) \right)$$

Η συνάρτηση σφάλματος $\operatorname{erf}(x)$ δεν υπολογίζεται αναλυτικά και γιαυτό για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούμε πίνακες, προσεγγίσεις ή αριθμητική ολοκλήρωση

π.χ. στο MatLab υπάρχει η συνάρτηση $\operatorname{erf}(x)$ καθώς και η αντίστροφη της $\operatorname{erfinv}(x)$.



Στοχαστικές (ή τυχαίες) Διεργασίες

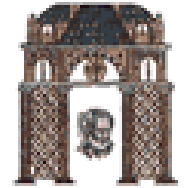
- **Stochastic process** (or random process) :

We are given an experiment G specified by its outcomes ζ .
To every outcome ζ we now assign, according to a certain rule, a time function

$$x(t, \zeta_i)$$

We have thus created a family of functions, one for each ζ . This family $x(t, \zeta)$ is called a stochastic process.

A stochastic process can be viewed as a function of two variables t and ζ . For a specific outcome ζ_i , the expression $x(t, \zeta_i)$ is a time function. For a specific time t_i , $x(t_i, \zeta)$ is a random variable. Finally, $x(t_i, \zeta_i)$ is a number.



Παράδειγμα

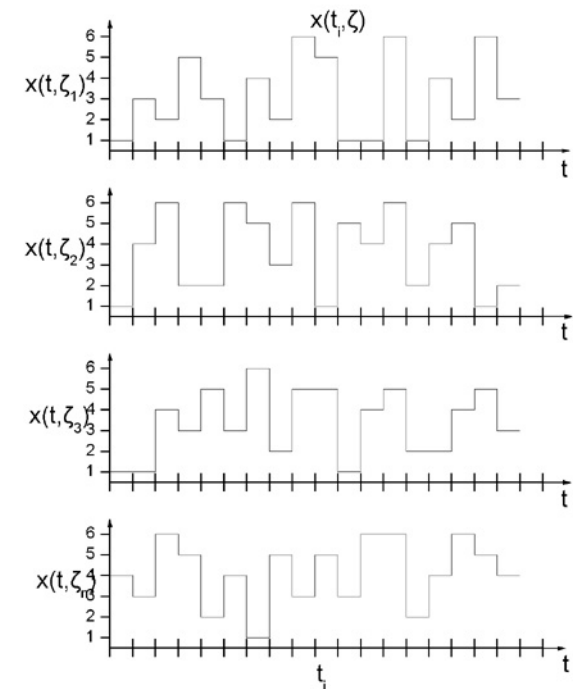
Consider a large number of dice ($\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$) and let assume that we toss them simultaneously many times. We define

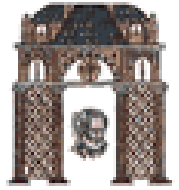
$$x(t_i, \zeta_j) = k, \quad k = 1, 2, \dots, 6$$

where k is the number shown in the face of the ζ_j die at the time t_i (see fig.1)

Such a collection of waveforms is called **ensemble**.

A specific waveform $x(t, \zeta_j)$ is called a **sample function**.





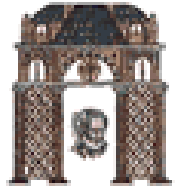
Ensemble average, Time averages

Ensemble average $E\{.\}$: Consider the values of the stochastic process $x(t, \zeta)$ at the time t_i . Then $x(t_i, \zeta)$ is a random variable. The statistical averages obtained from measurements made on $x(t_i, \zeta)$ are called ensemble averages.

Time averages: The statistical averages obtained by observing a sample function $x(t, \zeta_i)$ are called time averages.

Example: Let assume that the random variable ζ (discrete) has a probability $P(\zeta=\zeta_i, t_0)$, we have

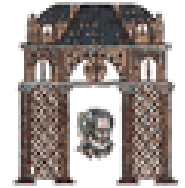
$$\begin{aligned} \text{ensemble mean} &= \sum_{i=1}^N x(\zeta_i, t_0) P_i(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x(\zeta_i, t_0) \\ \text{time mean} &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{M} \sum_{\kappa=1}^M x(\zeta_i, t_\kappa) \end{aligned}$$



Ergodic process

- A stochastic process is called ergodic iff (if and only if) its

TIME AVERAGES = ENSEMBLE AVERAGES



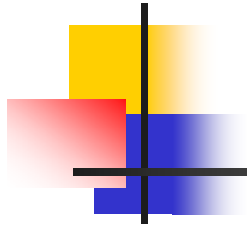
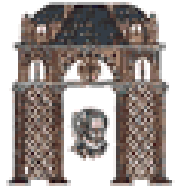
Stationary process

A random process is completely described by the N-fold joint p.d.f. of its values at the arbitrary time .

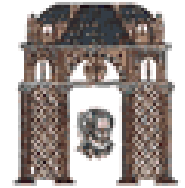
$$\text{p.d.f.} = f(x(\zeta, t_1), x(\zeta, t_2), \dots, x(\zeta, t_N))$$

If this p.d.f. is invariant under a shift of the time origin, the process is called *stationary in the strict sense.*

Ergodicity implies stationarity but the reverse is not in general true.



From now on, we shall use the notation $\mathbf{x}(t)$ to represent a stochastic process. The specific interpretation of $\mathbf{x}(t)$ as $\{x(\zeta, t), x(\zeta, t_i), x(\zeta_j, t), x(\zeta_i, t_i)\}$ will be understood from the context.



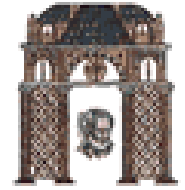
Autocorrelation $R_x(t_1, t_2)$

Η αυτοσυσχέτιση μιας στοχαστικής διεργασίας $\mathbf{x}(t)$ είναι

$$R_x(t_1, t_2) = E\{x(t_1)x(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_2 x_1 f(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2$$

Εάν η διεργασία είναι stationary, τότε

$$E\{x(t_1)x(t_2)\} = R_x(t_1 - t_2) = R_x(\tau), \text{ όπου } \tau = t_1 - t_2$$



Wide-sense stationary

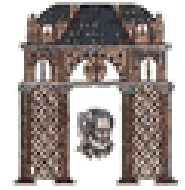
Stationary υπό την ευρεία έννοια σημαίνει ότι η μέση τιμή και η αυτοσυσχέτιση είναι ανεξάρτητα από την αρχή του χρόνου.

Άρα

$E\{x(t)\} = n_x$ (σταθερή, ανεξάρτητη από χρόνο)

$E\{x(t)x(t+\tau)\} = R_x(\tau)$ (εξαρτάται μόνο από την διαφορά τ)

Οι στοχ. διεργ. που θα μελετούμε εδώ θα είναι πάντοτε *wide sense stationary and ergodic in the mean and autocorrelation*



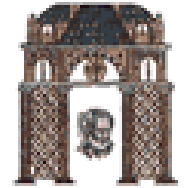
Power Spectrum $S(\omega)$

The Power spectrum $\mathbf{S}(\omega)$ of a stochastic stationary process is defined as the the Fourier Transform of its autocorrelation $R(\tau)$

$$\mathbf{R}(\tau) \leftrightarrow \mathbf{S}(\omega)$$

$S(\omega)$ is defined only for stationary processes.

For ergodic process $S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \int_{-T}^T \tilde{x}(t) e^{-j\omega t} dt \right|^2$



Ιδιότητες Αυτοσυσχέτισης

$R(\tau)$	πραγματική συνάρτηση
$R(\tau) = R(-\tau)$	συμμετρική
$R(0) \geq R(\tau)$	
$S(\omega) \geq 0$	Το φάσμα είναι πάντοτε θετικό

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = R(0) = \sigma_x^2$$

$$R(\infty) = |E\{x(t)\}|^2 \quad \text{Εάν } x(t) \text{ δεν είναι περιοδική συνάρτηση}$$

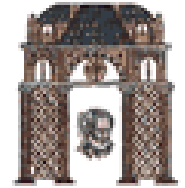


Ερμηνεία διαφόρων μέσων τιμών για εργοδικές στοχαστικές Διεργασίες <.>

Εάν $x(t)$ είναι η τάση πάνω σε μία αντίσταση 1Ω

$$\left(\langle f(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \right)$$

$E\{x(t)\} = \langle x(t) \rangle$	συνεχής συνιστώσα
$E\{x(t)\}^2 = \langle x(t) \rangle ^2$	ισχύς συνεχούς ρεύματος
$E\{ x(t) ^2\} = \langle x(t) ^2 \rangle$	ολική ισχύς
$\sigma_x^2 = E\{ x(t) ^2\} - E\{x(t)\}^2$	ισχύς εναλλασσομένου ρεύματος



Crosscorrelation $R_{xy}(t_1, t_2)$

Η ετεροσυσχέτιση δύο στοχαστικών διεργασιών $\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι

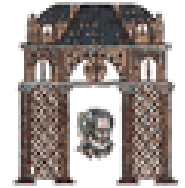
$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\}$$

Εάν οι διεργασίες είναι stationary, τότε

$$E\{x(t_1)y(t_2)\} = R_{xy}(t_1 - t_2) = R_{xy}(\tau), \text{ όπου } \tau = t_1 - t_2$$

και

$$\mathbf{R}_{xy}(\tau) \leftrightarrow \mathbf{S}_{xy}(\omega)$$



$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\} = E\{x(t_1)\}E\{y(t_2)\}$$

$\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι **ασυσχέτιστες**
(**uncorrelated**)

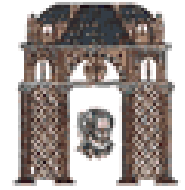
$$R_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1)y(t_2)\} = 0$$

$\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι **ορθογώνιες**
(**orthogonal**)

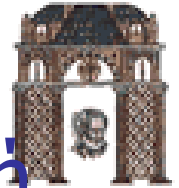
Εάν οι τ.μ.

$x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_N)$ και
 $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_N)$ είναι
ανεξάρτητες

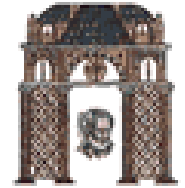
$\mathbf{x}(t)$ και $\mathbf{y}(t)$ είναι **ανεξάρτητες**
(**independent**)



Λευκός θόρυβος (white noise)



Λευκός Θόρυβος με Gaussian κατανομή



Συμβολισμοί και Διανύσματα

■ Θεωρήσεις

- Οι μετρήσεις (χαρακτηριστικά) είναι n -διάστατα διανύσματα \mathbf{x}

$$\mathbf{x} = [x_1 \quad \dots \quad x_n]^T$$

- Τα πρότυπα (κλάσεις) Ω_i , M στο πλήθος, υπολογίζονται από το σύνολο των χαρακτηριστικών μέσω της γενικής συνάρτησης απόφασης

$$\{\mathbf{x}\} \xrightarrow{d(\mathbf{x})} \{\Omega\}$$

■ Αποστάσεις

- Ευκλείδεια

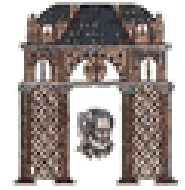
$$d_e(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ((\mathbf{x} - \mathbf{y})^T (\mathbf{x} - \mathbf{y}))^{1/2} = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}$$

- City block

$$d_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n \text{abs}(x_i - y_i)$$

- Chebychev

$$d_T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_i (x_i - y_i)$$



Μερικές χρήσιμες σχέσεις

$$\int_a^b u(t)dv(t) = u(t)v(t)\Big|_{t=a}^b - \int_a^b v(t)du(t)$$

Παράγωγος Ολοκληρώματος (τύπος του Leibniz)

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} f(\tau, t) d\tau = f(\varphi_2(t), t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t} - f(\varphi_1(t), t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t} + \int_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} \frac{\partial f(\tau, t)}{\partial t} d\tau$$

Ανισότητα του Swartz

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)dt \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \int_a^b |g(t)|^2 dt \text{ with equality if } f(t) = kg^*(t)$$