

ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 1

ΑΝΙΧΝΕΥΣΗ με ΑΝΑΤΡΟΦΟΔΟΤΗΣΗ

Θεωρήστε ένα απλό ανατροφοδοτούμενο σύστημα απόφασης. Σε δεδομένο διάστημα απόφασης $(0, T)$ λαμβάνονται ένας παλμός πλάτους A και λευκός θόρυβος (κατανομής Gaussian) ή ένας παλμός πλάτους $-A$ και λευκός θόρυβος, π.χ.

$$x(t) = \begin{cases} A + n(t) \\ -A + n(t) \end{cases}$$

Η πιθανότητα μετάδοσης του A είναι $P_1 = 1/2$.

Παίρνουμε δείγματα του λαμβανόμενου σήματος $x(t)$ κάθε T δευτερόλεπτα και η απόφαση λαμβάνεται ως εξής:

- (i) Αν $x_1 < -G_1$, το σήμα $-A$ είναι παρόν,
- (ii) Αν $x_1 > G_1$, το σήμα A είναι παρόν,
- (iii) Αν $-G_1 < x_1 < G_1$, δεν λαμβάνεται καμία απόφαση,

όπου x_1 είναι το δείγμα που λαμβάνουμε.

Όταν δεν παίρνεται καμία απόφαση, ο λήπτης ζητά από τον εκπομπό να επαναλάβει το σήμα και η απόφαση λαμβάνεται τώρα ως εξής:

- (i) Αν $x_1 < 0$, το σήμα $-A$ είναι παρόν.
- (ii) Αν $x_1 > 0$, το σήμα A είναι παρόν.

(α) Βρείτε τις εκφράσεις για τις πιθανότητες λάθους που ορίζονται παρακάτω:

$P_{e0} =$ Η απόφαση "A είναι παρόν" όταν "-A είναι παρόν" είναι αληθής.

$P_{e1} =$ Η απόφαση "-A είναι παρόν" όταν "A είναι παρόν" είναι αληθής.

$Q_0 =$ Η απόφαση δεν λαμβάνεται όταν στέλνεται το $-A$.

$Q_1 =$ Η απόφαση δεν λαμβάνεται όταν στέλνεται το A .

(β) Βρείτε τη μέση πιθανότητα λάθους, P_e , του παραπάνω συστήματος.

(γ) Αν $A = 2$, $\sigma_n^2 = 2$, βρείτε το G_1 έτσι ώστε η P_e να είναι ελάχιστη.

(δ) Βρείτε την P_e για το βέλτιστο G_1 του ερωτήματος (γ) και συγκρίνετέ το με έναν λήπτη ο οποίος δεν έχει ανατροφοδότηση.

(ε) Πόσο bandwidth χρειαζόμαστε παραπάνω για την ανατροφοδότηση.

(ζ) Πόσα δείγματα πρέπει να παίρνουμε στο $(0, T)$, ώστε ένα σύστημα δίχως ανατροφοδότηση να έχει την ίδια απόδοση με αυτό που έχει ανατροφοδότηση.

Απάντηση: Θετόντας $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{A}{\sigma_n \sqrt{2}}\right) = k$ έχουμε $G_1 = -\frac{\sigma_n^2}{2A} \ln \frac{k}{1-k}$

Για $A = 2$, $\sigma_n^2 = 2$ έχουμε: $k = 0,08$ και $G_1 = 1,23$.

Για $G_1 = 1,23$ η ελάχιστη πιθανότητα λάθους P_e είναι ίση με: $P_e^{\min} = \frac{1}{30} = 0,0334$

Χωρίς ανατροφοδότηση είναι $P_e = 0,07865$.

Άρα το σύστημα με ανατροφοδότηση έχει $0,07865 / 0,0334 = 2,35$ φορές καλύτερο bit error rate ενώ χρειάζεται **28%** περισσότερο Bandwidth. Με 2 δείγματα στο $(0, T)$ πετυχαίνουμε $P_e = 0,0228$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: $\operatorname{erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ (η συνάρτηση αυτή βρίσκεται υλοποιημένη στο Matlab $\operatorname{erf}()$ και η αντίστροφή της είναι η $\operatorname{erfinv}()$)